

ÁRVORE REDUZIDA DE CENÁRIOS PARA O PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO DE MÉDIO PRAZO

Joari Paulo da Costa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM PLANEJAMENTO ENERGÉTICO.

Aprovada por:

---

Prof. Luiz Fernando Loureiro Legey, Ph.D.

---

Prof. Luiz Pinguelli Rosa, D.Sc.

---

Prof. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite, D.Sc.

---

Dr. Gerson Couto de Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Isabel Cristina Mello Rosseti, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2007

COSTA, JOARI PAULO DA

Árvore reduzida de cenários para o  
planejamento da operação de curto prazo  
[Rio de Janeiro] 2007

XVII, 167 pp., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
D.Sc., Planejamento Energético, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1.Planejamento Energético 2.Otimização  
3.Incertezas 4.Programação Estocástica

I.COPPE/UFRJ      II.Título (série)

À meus pais, exemplo de vida

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Fernando Loureiro Legey, que durante todo o processo de estudo e elaboração deste trabalho foi sempre um conselheiro ponderado e estimulador. Sou grato pela sua paciência, amizade, experiência transmitida ao longo do desenvolvimento deste trabalho e permanente confiança.

A Gerson Couto de Oliveira, que sempre foi um amigo dedicado, além de um incentivador deste trabalho. Muitas horas foram empenhadas em trabalho conjunto, que se traduziram em significativas e inúmeras contribuições.

Aos professores do Programa de Planejamento Energético da COPPE/UFRJ, pelos ensinamentos e apoio.

Ao CEPEL e ONS, instituições às quais estive vinculado durante doutorado, pelo apoio e suporte.

Tive o privilégio de conviver, ao longo de minha trajetória profissional, com Leslie Afrânio Terry, Jerson Kelman e Mario Veiga Ferraz Pereira a quem devo muito do que aprendi.

Meus filhos também apoiaram sobremaneira esta minha jornada, sacrificando muitas vezes horas de seu lazer e souberam compreender a importância desta conquista para mim. Bernardo, sempre que pode, ocupou-se em me escutar e esclarecer inúmeras de minhas dúvidas conceituais, além de prestar inestimável apoio computacional. Conrado, por sua vez, com sua perseverante obstinação em não me deixar cometer imprecisões conceituais, muito me ajudou a esclarecer, para mim mesmo, inúmeras questões. Sem a ativa participação deles dois este trabalho não teria se concretizado.

À Suely, pela compreensão nos muitos finais de semana voltados à elaboração desta tese.

Naturalmente, esta tese resulta de inúmeras conversas, discussões e trabalhos com muitas pessoas. Agradeço a todos aqueles não citados nominalmente e que, de uma forma ou de outra, tornaram possível essa realização.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ÁRVORE REDUZIDA DE CENÁRIOS PARA O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE MÉDIO PRAZO

Joari Paulo da Costa

Dezembro/2007

Orientador: Luiz Fernando Loureiro Legey

Programa: Planejamento Energético

Esta tese apresenta uma metodologia para seleção de cenários multivariados de afluência para ser aplicada ao problema de planejamento da operação de médio prazo de sistemas hidrotérmicos interligados (horizonte de até seis meses e estágios semanais e mensais). Os cenários propostos constituem uma árvore reduzida, porém representativa, das alternativas de afluências aos diversos reservatórios do sistema gerador de energia elétrica que, quando utilizada no modelo de otimização, viabilize a obtenção de uma solução para o problema em um tempo viável de processamento que seja robusta (pequenas variações nos cenários resultam em pequenas variações tanto no valor da função objetivo quanto na solução do problema). Um estudo de caso com o sistema interligado brasileiro ilustra a aplicação da técnica proposta, examinando resultados tanto do ponto de vista hidrológico quanto da sua aplicação a um modelo de otimização da operação hidrotérmica.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

REDUCED SCENARIO TREE FOR MID-TERM HYDROTHERMAL  
OPERATION PLANNING

Joari Paulo da Costa

December/2007

Advisor: Luiz Fernando Loureiro Legey

Department: Energy Planning

This thesis presents a methodology for multivariate inflow scenario generation to be used in hydrothermal mid-term operation planning (typically up to six months time ahead). The proposed scenario tree constitutes a reduced but still representative sample of the inflows to the hydroplants of a hydrothermal power system, in the sense that the solutions obtained in the optimization model are robust (small variations on the scenarios results in small variations in the objective value and in the solution vector values). A case study with the interconnected Brazilian power system illustrate the use of the proposed methodology, presenting results considering hydrological aspects as well as its use in hydrothermal mid-term optimization model.

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos</b>                | <b>5</b>  |
| 2.1      | Sistema Interligado Nacional — breve descrição . . . . .                 | 5         |
| 2.2      | O problema de planejamento da operação . . . . .                         | 12        |
| <b>3</b> | <b>Planejamento da operação de médio prazo e programação estocástica</b> | <b>17</b> |
| 3.1      | Formulação do problema de planejamento da operação de médio prazo        | 17        |
| 3.2      | Formulação do problema de programação estocástica . . . . .              | 21        |
| 3.2.1    | Modelo Básico . . . . .  | 23        |
| 3.2.2    | Problema de dois estágios . . . . .                                      | 24        |
| 3.2.3    | Problema multi-estágio . . . . .   | 27        |
| 3.2.4    | Representação das incertezas . . . . .                                   | 30        |
| <b>4</b> | <b>Árvore de cenários representativa e de tamanho limitado</b>           | <b>33</b> |
| 4.1      | Modelo BONSAI . . . . .  | 35        |
| 4.1.1    | Modelo estocástico das afluências . . . . .                              | 36        |
| 4.1.2    | Estrutura da árvore . . . . .  | 39        |
| 4.1.3    | Processo de seleção de cenários . . . . .                                | 42        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.2      | Técnicas de redução de cenários . . . . .                             | 43        |
| 4.2.1    | Agregação em energias naturais afluentes . . . . .                    | 43        |
| 4.2.1.1  | $k$ -Means . . . . .  | 44        |
| 4.2.1.2  | Redução recursiva . . . . .   | 47        |
| 4.2.1.3  | Reticulado . . . . .  | 54        |
| 4.2.2    | Discretização usando componentes principais . . . . .                 | 56        |
| 4.3      | Avaliação de métodos de geração de cenários . . . . .                 | 60        |
| 4.3.1    | Medida de qualidade da árvore de cenários . . . . .                   | 60        |
| 4.3.2    | Testando métodos de geração . . . . .                                 | 61        |
| 4.3.3    | Aspectos computacionais . . . . .                                     | 63        |
| <b>5</b> | <b>Análise da estrutura proposta</b>                                  | <b>64</b> |
| 5.1      | Tamanho da amostra reduzida . . . . .                                 | 64        |
| 5.2      | Cotejo das técnicas de redução propostas . . . . .                    | 71        |
| 5.3      | Aspectos hidrológicos . . . . .                                       | 73        |
| 5.3.1    | $k$ -Means . . . . .  | 73        |
| 5.3.2    | Redução recursiva . . . . .   | 83        |
| 5.3.3    | Reticulado . . . . .  | 91        |
| 5.3.4    | Componentes principais . . . . .                                      | 99        |
| 5.4      | Estabilidade da política com respeito à estrutura da árvore . . . . . | 109       |
| 5.4.1    | Valor de referência . . . . .   | 109       |
| 5.4.2    | Resultados consolidados . . . . .                                     | 111       |
| 5.4.3    | $k$ -Means . . . . .  | 111       |
| 5.4.4    | Redução recursiva . . . . .   | 113       |
| 5.4.5    | Reticulado . . . . .  | 113       |



|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.4.6    | Componentes Principais . . . . .                       | 114        |
| 5.4.7    | Resultados Obtidos . . . . .                           | 114        |
| 5.4.8    | Estudos adicionais . . . . .                           | 123        |
| 5.4.8.1  | 16 representantes . . . . .                            | 123        |
| 5.4.8.2  | Estabilidade com componentes principais . . . . .      | 123        |
| 5.4.9    | Caso com três estágios . . . . .                       | 129        |
| 5.4.9.1  | Caso Agosto de 2003 . . . . .                          | 129        |
| 5.4.9.2  | Caso Maio de 2005 . . . . .                            | 130        |
| 5.5      | Comentários finais . . . . .                           | 133        |
| <b>6</b> | <b>A incerteza importa?</b>                            | <b>134</b> |
| 6.1      | Um limite para PPE . . . . .                           | 136        |
| 6.2      | Procedimento de avaliação . . . . .                    | 138        |
| 6.3      | Aplicação . . . . .                                    | 139        |
| 6.4      | Valor esperado da informação perfeita . . . . .        | 143        |
| <b>7</b> | <b>Conclusão</b>                                       | <b>148</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                      | <b>157</b> |
| <b>A</b> | <b>Identificação e censura de valores discrepantes</b> | <b>166</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Sistema Interligado Nacional (SIN) . . . . .  | 6  |
| 2.2 | Reservatório Equivalente de Energia . . . . .   | 7  |
| 2.3 | Energias naturais afluentes (MWmed) . . . . .   | 9  |
| 2.4 | Diagrama esquemático para usinas do SE/CO e Sul . . . . .   | 11 |
| 2.5 | Cadeia de modelos para planejamento da operação . . . . .   | 14 |
| 3.1 | Paradigma de programação estocástica . . . . .  | 22 |
| 3.2 | Árvore de cenários . . . . .  | 23 |
| 3.3 | Árvore de cenários multi-estágio . . . . .  | 29 |
| 5.1 | Sistema interligado brasileiro . . . . .  | 65 |
| 5.2 | ENAs: Média, desvio padrão e coeficiente de variação para janeiro de 2002 — método $k$ -Means . . . . . | 66 |
| 5.3 | ENAs: Distribuição marginal condicionada para janeiro de 2002 — método $k$ -Means (1/2) . . . . .       | 68 |
| 5.3 | ENAs: Distribuição marginal condicionada para janeiro de 2002 — método $k$ -Means (2/2) . . . . .       | 69 |
| 5.4 | Geração de amostras <b>iid</b> e reduzidas . . . . .  | 74 |
| 5.5 | ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 — método $k$ -Means (1/2) . . . . .          | 76 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.5  | ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método $k$ -Means (2/2) . . . . .   | 77 |
| 5.6  | ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método $k$ -Means (1/2) . . . . .  | 78 |
| 5.6  | ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método $k$ -Means (2/2) . . . . .  | 79 |
| 5.7  | Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para maio de 2003 – método $k$ -Means . . . . .                                      | 80 |
| 5.8  | Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, $k$ -Means, sementes diferentes . . . . .                               | 82 |
| 5.9  | Percentagem de classes $(A, M, B)^4$ com falhas, método $k$ -Means . . . . .   | 83 |
| 5.10 | Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, $k$ -Means, amostras <i>iid</i> de tamanhos diferentes . . . . .        | 84 |
| 5.11 | ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método redução recursiva (1/2) . . . . .  | 85 |
| 5.11 | ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método redução recursiva (2/2) . . . . .  | 86 |
| 5.12 | ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método redução recursiva (1/2) . . . . .                                   | 87 |
| 5.12 | ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método redução recursiva (2/2) . . . . .                                   | 88 |
| 5.13 | Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para maio de 2003 – método redução recursiva . . . . .                               | 89 |
| 5.14 | Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, redução recursiva, sementes diferentes . . . . .                        | 90 |
| 5.15 | Percentagem de classes $(A, M, B)^4$ com falhas, método redução recursiva . . . . .  | 91 |
| 5.16 | Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, redução recursiva, amostras <i>iid</i> de tamanhos diferentes . . . . . | 92 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.17 ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método reticulado (1/2) . . . . .   | 93  |
| 5.17 ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método reticulado (2/2) . . . . .   | 94  |
| 5.18 ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método reticulado (1/2) . . . . .                            | 95  |
| 5.18 ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método reticulado (2/2) . . . . .                            | 96  |
| 5.19 Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para maio de 2003 – método reticulado . . . . .                        | 97  |
| 5.20 Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, reticulado, sementes diferentes . . . . .                 | 98  |
| 5.21 Recobrimento do reticulado $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003, reticulado, amostras iid de tamanhos diferentes . . . . . | 99  |
| 5.22 Ruídos correlatados dos postos principais para as <b>81</b> células da discretização . . . . .   | 100 |
| 5.23 Diferenças absolutas entre correlações cruzadas: históricas $\times$ 4 componentes principais . . . . .                                | 102 |
| 5.24 Valores de ruídos correlatados para as células BBBB e AAAA . . . . .   | 102 |
| 5.25 Distribuição dos ruídos padronizados para usinas do SIN . . . . .  | 103 |
| 5.26 ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método componentes principais (1/2) . . . . .                             | 105 |
| 5.27 ENAs: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método componentes principais (2/2) . . . . .                             | 106 |
| 5.28 ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método componentes principais (1/2) . . . . .                | 107 |
| 5.28 ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para maio de 2003 – método componentes principais (2/2) . . . . .                | 108 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.29 | Percentagem de classes (A, M, B) <sup>4</sup> com falhas, método componentes principais . . . . .                  | 109 |
| 5.30 | Valores ótimos consolidados — p.u. . . . .   | 113 |
| 5.31 | Fevereiro — Métodos de agregação (1/2) . . . . .   | 115 |
| 5.31 | Fevereiro — Métodos de agregação (2/2) . . . . .   | 116 |
| 5.32 | Maió — Métodos de agregação (1/2) . . . . .  | 117 |
| 5.32 | Maió — Métodos de agregação (2/2) . . . . .  | 118 |
| 5.33 | Agosto — Métodos de agregação (1/2) . . . . .  | 119 |
| 5.33 | Agosto — Métodos de agregação (2/2) . . . . .  | 120 |
| 5.34 | Novembro — Métodos de agregação (1/2) . . . . .  | 121 |
| 5.34 | Novembro — Métodos de agregação (2/2) . . . . .  | 122 |
| 5.35 | Maió — Estudo com 16 classes . . . . .   | 124 |
| 5.36 | Agosto — Estudo com 16 classes . . . . .   | 125 |
| 5.37 | Novembro — Estudo com 16 classes . . . . .   | 126 |
| 5.38 | Estabilidade com componentes principais — Valores ótimos consolidados (p.u.) . . . . .                             | 128 |
| 5.39 | Agosto 2003 — Caso três estágios . . . . .   | 130 |
| 6.1  | Custos de operação (10 <sup>3</sup> \$) . . . . .  | 142 |
| 6.2  | Custo relativo (PVM = 1) . . . . .   | 143 |
| 6.3  | Distribuição dos custos de segundo estágio segundo as soluções ótimas determinística e estocástica (1/2) . . . . . | 144 |
| 6.3  | Distribuição dos custos de segundo estágio segundo as soluções ótimas determinística e estocástica (2/2) . . . . . | 145 |

# Lista de Tabelas

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Evolução do parque gerador brasileiro . . . . .                                 | 10  |
| 2.2 | Configuração do SIN em 2006 . . . . .   | 10  |
| 5.1 | Índices de estabilidade . . . . .   | 70  |
| 5.2 | Características das configurações . . . . .                                     | 72  |
| 5.3 | Valores extremos ENAs padronizadas, amostral e agregadas . . . . .              | 81  |
| 5.4 | Valor de referência ( $10^3\$$ ) . . . . .                                      | 110 |
| 5.5 | Consolidação dos resultados (p.u.) . . . . .                                    | 112 |
| 5.6 | Análise de estabilidade em relação à probabilidade $\tau$ . . . . .             | 127 |
| 5.7 | Geração térmica média e custos marginais — Árvore de referência . . . . .       | 132 |
| 5.8 | Geração térmica média e custos marginais — Análise de estabilidade . . . . .    | 132 |
| 6.1 | Função de custo futuro ( $\$/MWh$ ) . . . . .                                   | 139 |
| 6.2 | Limites baseados na solução de valor esperado – (custos em $10^3\$$ ) . . . . . | 141 |
| 6.3 | Energia Armazenada . . . . .  | 141 |
| 6.4 | Distribuição dos valores ótimos ( $10^3 \$$ ) . . . . .                         | 146 |

# Nomenclatura

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $\mathcal{X}$           | conjunto de soluções viáveis fechado, não-vazio $\in \mathbb{R}^n$ e que não depende de $\mathbf{P}$  |
| $\mathbb{E}$            | operador valor esperado   |
| $\Omega$                | espaço amostral: conjunto de todas as possíveis realizações (ou estados da natureza) de um experimento aleatório  |
| $\omega$                | variável aleatória com suporte $\Omega$   |
| $\rho(i)$               | produtividade da usina hidroelétrica $i$ em $(\text{MW}/(\text{m}^3/\text{s}))$   |
| $f(\mathbf{x}, \omega)$ | função objetivo do vetor de decisão $\mathbf{x}$ e da variável aleatória $\omega$   |
| $G_t(j)$                | geração térmica da usina termoelétrica $j$ no período $t$ , em $(\text{MWh})$   |
| iid                     | independente e identicamente distribuído  |
| $\text{Ne}(\mathbf{n})$ | conjunto de subsistemas para os quais o subsistema $\mathbf{n}$ exporta energia   |
| $\text{Ni}(\mathbf{n})$ | conjunto de subsistemas dos quais o subsistema $\mathbf{n}$ importa energia   |
| $\mathbf{P}$            | distribuição de probabilidades; se $\mathbf{P}$ é discreta, esta distribuição é completamente determinada pelo vetor $\mathbf{p}$ de suas probabilidades para um dado conjunto de cenários possíveis. |
| $Q_t(i)$                | volume turbinado pela usina $i$ no período $t$ , em $\text{hm}^3$   |
| $S_t(i)$                | volume vertido pela usina $i$ no período $t$ , em $\text{hm}^3$   |
| $\$$                    | unidade monetária. Nesta tese, a unidade monetária é o Real (R\$)   |

|        |   |
|--------|---|
| ACP    | Análise de Componentes Principais   |
| CCEE   | Câmara de Comercialização de Energia Elétrica   |
| EAR    | Energia Armazenável Máxima do reservatório equivalente  |
| ENA    | Energia Natural Afluente ao reservatório equivalente  |
| MLT    | Média de longo termo  |
| MWh    | Megawatt hora = $10^6$ Watt por hora (medida de energia)  |
| MWmed  | Megawatt médio: energia correspondente à potência média gerada no intervalo de tempo considerado (1 MWmed-ano = 8760 MWh/ano)   |
| MWmês  | 730 MWh/mês — energia correspondente à potência média gerada ao longo de um mês médio   |
| ONS    | Operador Nacional do Sistema Elétrico   |
| p.u.   | por unidade. O valor em p.u. de uma determinada grandeza corresponde ao seu valor normalizado em relação a um valor de referência (valor nominal): $\text{p.u.} = (\text{valor real})/(\text{valor de referência})$ . Também podem ser expressos na forma de percentagem. |
| PAR(p) | modelo estocástico periódico auto-regressivo de ordem p   |
| PDDE   | Programação Dinâmica Dual Estocástica, (SDDP em inglês)   |
| PEN    | Plano Anual da Operação Energética  |
| PLD    | Preço de Liquidação de Diferenças   |
| PMO    | Programa Mensal de Operação Eletroenergética  |
| PPE    | Problema de programação estocástica   |
| PVM    | Problema de valor médio   |
| SIN    | Sistema Interligado Nacional — Instalações responsáveis pelo suprimento de energia elétrica a todas as regiões do país, interligadas eletricamente.   |



UHE usina hidroelétrica

UTE usina termoelétrica

# Capítulo 1

## Introdução

O planejamento da operação de sistemas de geração hidrotérmicos interligados tem por objetivo definir as metas de geração de cada usina hidráulica e térmica para um intervalo que se estende por até vários anos. Estas metas são definidas a partir de uma estratégia de operação que visa atender a demanda e minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento.

O problema de planejamento da operação é um problema de tomada de decisões sob incertezas. Estas incertezas são de diversas naturezas: aflúências, demanda, custos e disponibilidade de combustíveis, falhas na disponibilidade dos equipamentos, configuração do parque gerador <sup>1</sup> etc. Em geral, para os modelos que tratam do planejamento da operação de médio prazo, que considera um horizonte de até seis meses, o único elemento aleatório considerado são as aflúências futuras. Como será visto no Capítulo 3, uma das maneiras de se modelar este problema é formulá-lo como um problema de programação estocástica com recurso.

A programação estocástica é uma formulação matemática para o problema de decisões sob incertezas que trata explicitamente as incertezas quantificáveis em um modelo de otimização. Estas incertezas normalmente provêm de distribuições con-

---

<sup>1</sup>Embora a configuração do parque gerador seja uma questão mais afeta ao planejamento da expansão da oferta, como as atividades concernentes ao planejamento consideram um horizonte de cinco anos, há uma incerteza não apenas quanto à data de entrada em operação das novas usinas e linhas de interligação, mas também acerca de quais destes equipamentos passarão a fazer parte do sistema gerador.

tínuas ou de um grande número de dados. Exceto em casos muito especiais, os problemas de programação estocástica só podem ser resolvidos com distribuições discretas com um número limitado de realizações. Um procedimento para especificar esta distribuição discreta e de cardinalidade limitada, de forma a viabilizar a solução do problema em modelo matemático, é denominado de método de geração de cenários. A discretização das distribuições deve ser considerada como parte do processo de modelar o problema, pois representa o modo escolhido para modelar as incertezas nos dados.

Este trabalho apresenta uma proposta para tratamento das incertezas representadas por meio de árvores de cenários em modelos de programação estocástica. O objetivo é fornecer árvores representativas de cenários de afluências, com tamanho limitado e estrutura definida, para uso no planejamento da operação energética de médio prazo de sistemas hidrotérmicos. A avaliação desta árvore de cenários será feita resolvendo o problema de planejamento da operação sob incertezas considerando a árvore completa. Os procedimentos amostrais de como percorrer os cenários da árvore (original ou reduzida) não serão tratados. Entretanto, ressalta-se que uma vez definida esta árvore reduzida, caso o percurso completo de todos os seus ramos resulte ainda por demais oneroso em termos de requisitos computacionais, nas aplicações da vida real sempre será possível recorrer a processos de amostragem.

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 apresenta-se a contextualização do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos interligados de grande porte, como o SIN, qualificando-o como um problema de grande porte, multi-período e multi-estágio, não-linear, não-separável e estocástico. Estas características fazem com que para a sua solução tenha-se que recorrer a técnicas de divisão do problema em etapas, nas quais são utilizados modelos com diferentes graus de detalhe para a representação do sistema.

O Capítulo 3 apresenta com mais detalhes a formulação do problema de planejamento da operação de médio prazo, no qual as usinas são representadas de forma individualizada e o horizonte de planejamento se estende por até um ano, em geral dividido em estágios mensais. O objetivo desta etapa do planejamento da operação é determinar as metas de geração de cada usina de forma a atender as condições

de fronteira no seu horizonte, fornecidas pelo modelo de longo prazo. O capítulo conclui com a apresentação da metodologia de programação estocástica empregada para a solução deste problema.

O Capítulo 4 apresenta a questão que está sendo tratada neste trabalho: como obter uma descrição representativa para as incertezas envolvidas, considerando um conjunto de realizações de cardinalidade finita e que permita resolver de forma adequada o problema em foco. As incertezas consideradas no problema de planejamento de médio prazo são aquelas referentes às afluências futuras. Neste capítulo também é apresentado o modelo estocástico adotado para representar o processo estocástico multivariado das afluências e a estrutura proposta para uma árvore de cenários de tamanho limitado mas representativa. Este trabalho avalia duas abordagens para a construção desta árvore estruturada: uma baseada em seleção de uma amostra representativa a partir de uma amostra aleatória de tamanho elevado e outra utilizando a análise de componentes principais para reduzir a dimensionalidade do espaço amostral e, posteriormente, discretizá-lo, sem realizar amostragem aleatória. Na primeira abordagem, três técnicas foram empregadas: o método de agregação usando  $k$ -Means; o método de redução recursiva utilizando métricas de probabilidades; e um método empírico de estratificação do espaço amostral (método reticulado). As técnicas utilizadas para a construção desta árvore reduzida são apresentadas e comentadas, bem como delineiam-se algumas das idéias para a avaliar o uso destas árvores no problema de otimização.

No Capítulo 5, a proposta de descrição das incertezas por meio destas árvores reduzidas é avaliada considerando diversas aplicações a configurações distintas do Sistema Interligado Nacional. Inicialmente, é feita a avaliação do tamanho adequado da amostra reduzida, onde se conclui que com **81** cenários agregados é possível atender a questão da estabilidade dos resultados (pequenas perturbações na árvore causam pequenas alterações nos resultados do modelo de otimização). Em seguida, esta avaliação é aprofundada, considerando as outras metodologias de agregação propostas. Mostra-se que, se por um lado amostras reduzidas de tamanho **81** apresentam estabilidade, os métodos de agregação têm desempenho diferenciado, sendo os mais estáveis os métodos reticulado e componentes principais. A análise também se estende para considerar árvores de mais de um estágio estocástico, onde se mostra

que a estrutura proposta de se considerar amostras menos densas à medida que o horizonte de decisão se afasta não compromete a decisão do primeiro estágio.

Em seguida, complementa-se o estudo no Capítulo 6, por meio de uma breve discussão acerca da necessidade e relevância de se considerar o problema de planejamento da operação como um problema de decisões sob incerteza, avaliando os resultados obtidos com a abordagem alternativa de considerar apenas a ocorrência do valor médio como uma descrição adequada do futuro. Embora esta questão tenha sido tratada há já algum tempo, como se ressalta pelas discussões reportadas por Massé (1946), ela é recorrente no setor elétrico, onde por vezes se levantam vozes para defender abordagens mais simplificadas e que aparentemente propiciariam resultados melhores. Neste capítulo se mostra que nem sempre esta afirmação é verdadeira.

Finalmente, o Capítulo 7 contém as conclusões e recomendações de trabalhos futuros e desenvolvimentos adicionais.

# Capítulo 2

## Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos

### 2.1 Sistema Interligado Nacional — breve descrição

O Sistema Interligado Nacional de geração hidrotérmica (SIN) é composto (configuração de 2006) por 148 usinas hidroelétricas, 43 usinas térmicas, das quais 2 são usinas nucleares, (Figura 2.1, página 6). A capacidade instalada é de 87 002 MW, sendo 84% hidroelétrica, com um total de  $86 \times 10^3$  km de linhas de transmissão a longa distância ( $\geq 230$ kV). Apenas 3,4% da capacidade de produção de eletricidade do país encontra-se fora do SIN, em pequenos sistemas isolados localizados principalmente na região amazônica.

O Sistema Interligado Nacional, com capacidade total de armazenamento (2006) de 254 200<sup>1</sup> MWh, está dividido em quatro subsistemas: Sudeste/Centro-Oeste, Sul, Nordeste e Norte, com as seguintes características gerais:

**Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO)**, onde se concentra o grande mercado de demanda no país. Este subsistema é importador de outras regiões e países vizinhos, na maior parte do ano. A capacidade de armazenamento das usinas hidráulicas é de 176 563 MWh, que corresponde a 69,5% do total;

---

<sup>1</sup>Ou seja, com a água armazenada nos reservatórios que compõem o SIN é possível atender uma carga média de 254 200 MW, durante um mês.

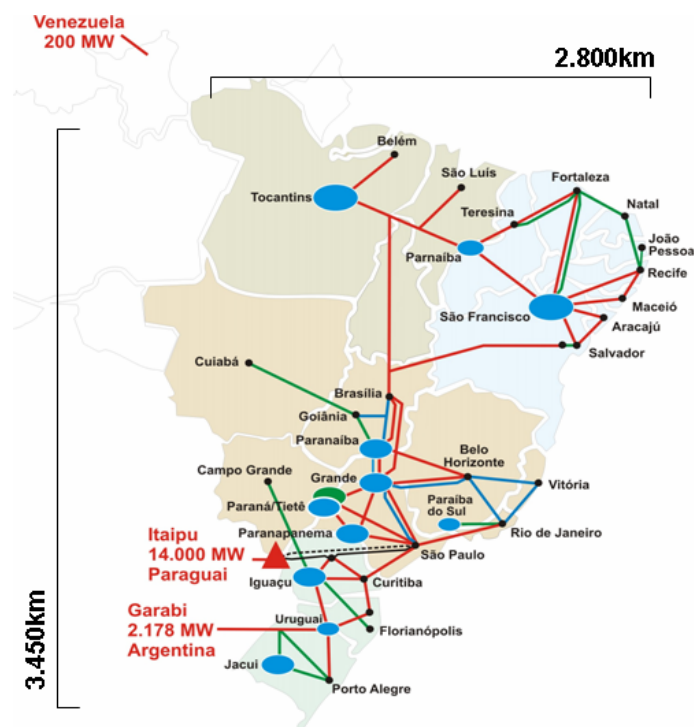


Figura 2.1: Sistema Interligado Nacional (SIN)

[Fonte: ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

**Sul (S)** é um sistema com grande volatilidade de armazenamento, apresentando intercâmbios com o SE/CO variando de sentido ao longo do ano. A capacidade de armazenamento das usinas hidráulicas é de 15 533 MWmês, 6,1% do total. A longo prazo, a tendência deste subsistema é de exportação de energia;

**Nordeste (NE)** apresenta demanda crescente de energia, com tendência à importação de energia, tendo em vista o esgotamento do aproveitamento do seu potencial hidroelétrico. A capacidade de armazenamento das usinas hidráulicas é de 50 203 MWmês, 19,7% do total; e

**Norte (N)** é um sistema essencialmente exportador de energia durante 9 meses do ano, com tendência a aumentar o volume de exportação. A capacidade de armazenamento das usinas hidráulicas é de 11 901 MWmês, 4,7% do total.

As usinas hidroelétricas pertencentes a cada um destes subsistemas podem ser representadas de forma agregada pelo reservatório equivalente de energia associado, (ARVANIDITIS; ROSING, 1970), esquematizado na Figura 2.2, página 7, cujas principais características são (TERRY, 1980), (TERRY et al., 1986):

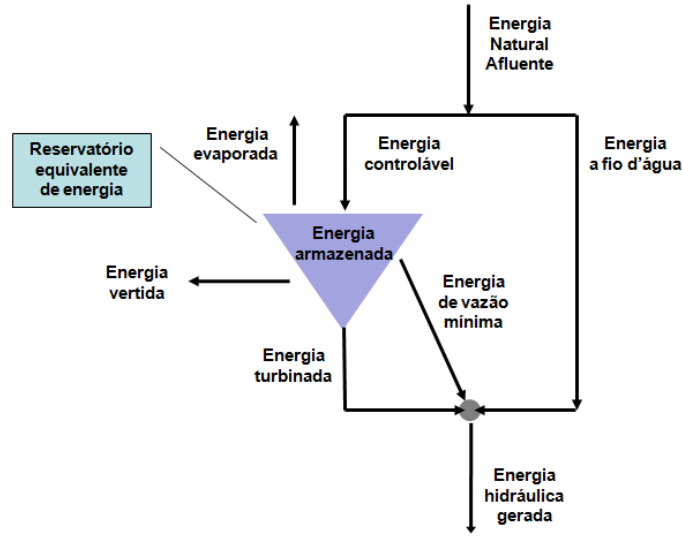


Figura 2.2: Reservatório Equivalente de Energia

[Fonte: Adaptado de (TERRY et al., 1986)]

- a capacidade de armazenamento do reservatório equivalente (MWhês) do subsistema  $n$ , estimada pela energia produzida pelo deplecionamento completo dos reservatórios do sistema de acordo com uma política de operação, considerando afluências nulas, dada por:

$$EAR = 730 \times 3.6 \times 10^{-3} \sum_{i \in NH(n)} \bar{V}_i \sum_{j \in J_i} \rho(j) Q_{TOT},$$

onde  $NH(n)$  é o conjunto de usinas hidroelétricas pertencentes ao subsistema  $n$ ,  $\bar{V}_i$  é a capacidade de armazenamento do reservatório  $i$  ( $hm^3$ ),  $J_i$  é o conjunto de usinas a jusante da usina  $i$  e a usina  $i$  e, para cada usina  $i \in NH(n)$ ,  $\rho(i)$  é a produtividade ( $MW/m^3/s$ ) e  $Q_{TOT}(i)$  o volume total afluente ( $hm^3$ );

- a energia natural afluente (MWhês) ao reservatório equivalente do subsistema  $n$ , dada por:

$$ENA = 730 \times 3.6 \times 10^{-3} \sum_{i \in NH(n)} \rho(i) Q_{TOT}(i).$$

Esta energia é dividida em duas partes: a energia controlável, associada às vazões afluentes às usinas com reservatório e a energia a fio d'água, associada às usinas sem reservatório;

- a energia de vazão mínima (MWhês), dada pelo somatório das energias correspondentes às vazões mínimas obrigatórias das usinas; e



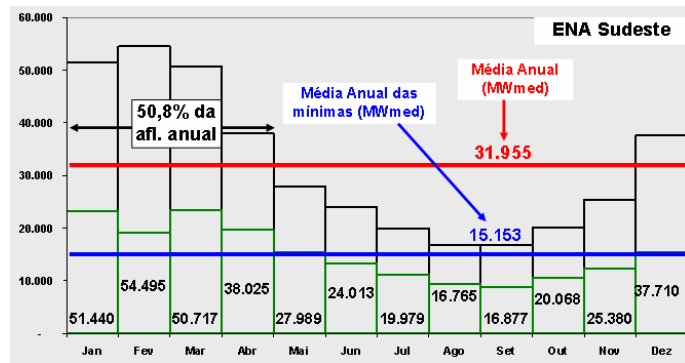
- a energia evaporada (MWhês), dada pelo somatório das perdas de energia devidas à evaporação em cada reservatório que compõe o sistema.

Cabe observar que tanto a energia controlável, a energia evaporada e a energia de vazão mínima dependem da energia armazenada no reservatório equivalente. A energia controlável para um dado estado de armazenamento é obtida multiplicando-se a energia controlável média – calculada supondo-se a altura média nos reservatórios que compõem o sistema – por um fator de correção que é função da energia armazenada. Por sua vez, o cálculo da energia de vazão mínima foi simplificado supondo-se a altura de queda constante e igual à altura média das usinas.

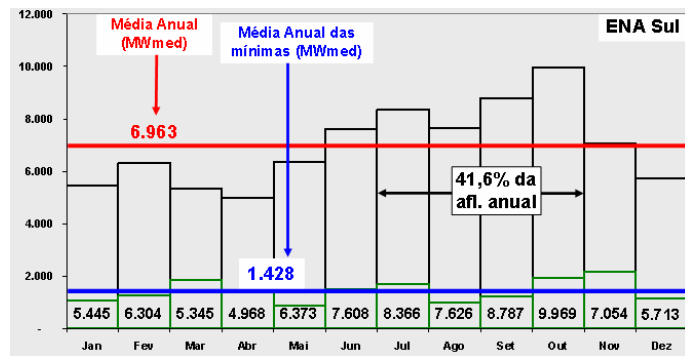
As usinas hidroelétricas, com reservatórios de grande capacidade, situam-se em 12 bacias hidrográficas, em geral distantes dos centros de carga. Os regimes hidrológicos destas bacias são diferentes: nas regiões SE/CO, NE e N, o comportamento das vazões naturais afluentes, e portanto das energias naturais afluentes, é marcadamente sazonal: para cada ano existe um período de vazões favoráveis de dezembro a abril, chamado de período úmido ou período chuvoso, e um período de vazões desfavoráveis — período seco — de maio a novembro. Já para a região Sul não existe tal sazonalidade. Esta diversidade hidrológica, conforme mostra a Figura 2.3, página 9, em termos da energia natural média mensal afluente (ENA) aos quatro subsistemas, pode ser aproveitada por meio do sistema de linhas de transmissão que conectam estes subsistemas e permitem transferências de energia de um sistema para outro.

O SIN encontra-se em expansão, como pode ser visto na Tabela 2.1, página 10, onde se vê a inserção de usinas não convencionais, movidas a combustíveis renováveis a partir de 2008. Em 2006, 91,8% da produção de energia elétrica brasileira foi de origem hidráulica, conforme Tabela 2.2, página 10, e a predominância de geração de origem hidroelétrica ainda deve se manter por um período razoável de tempo. Adicionalmente, o SIN pode importar 4078 MW de Itaipu e 2192 MW dos países vizinhos.

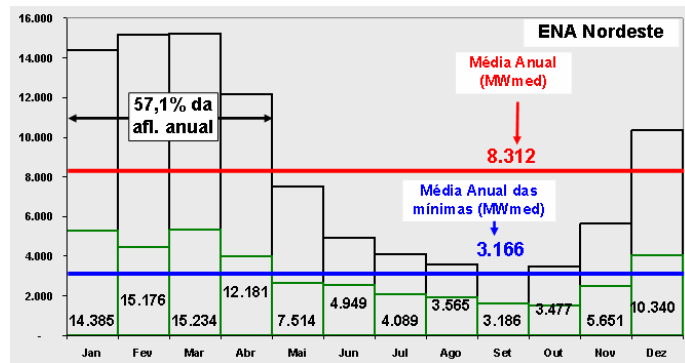
O total de agentes participantes do SIN tem aumentado ao longo do tempo, passando de 74 agentes em 1988 para 170 agentes em 2006. A Figura 2.4, página 11, ilustra, para parte do subsistema SE/CO e Sul, a diversidade de proprietários de usinas num mesmo rio e bacia.



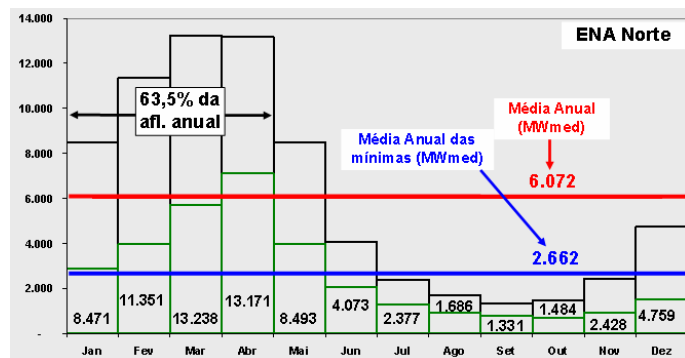
(a) Sudeste/Centro-Oeste



(b) Sul



(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 2.3: Energias naturais afluentes (MWmed)

[Fonte: ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

| Capacidade instalada   | 2002   |       | 2005   |       | 2008   |       |
|------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
|                        | (MW)   | (%)   | (MW)   | (%)   | (MW)   | (%)   |
| Total                  | 74 670 | 100,0 | 84 176 | 100,0 | 93 893 | 100,0 |
| Hidro                  | 63 834 | 85,5  | 70 013 | 83,2  | 75 315 | 80,2  |
| Térmicas convencionais | 8 829  | 11,8  | 12 156 | 14,4  | 13 301 | 14,2  |
| Nuclear                | 2 007  | 2,7   | 2 007  | 2,4   | 2 007  | 2,1   |
| Renováveis (Proinfa)   |        |       |        |       | 3 270  | 3,5   |

Tabela 2.1: Evolução do parque gerador brasileiro em valores de 31 de dezembro  
[Fonte: ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

| Usina                | Capacidade instalada |        | Produção  |        |
|----------------------|----------------------|--------|-----------|--------|
|                      | (MW)                 | (%)    | (GWh)     | (%)    |
| Hidro Nacional       | 66 392,8             | 76,31  | 296 646,8 | 71,25  |
| Hidro Itaipu         | 7 000,0              | 8,05   | 85 600,8  | 20,56  |
| Térmica Convencional | 11 371,0             | 13,07  | 20 104,9  | 4,83   |
| Termonuclear         | 2 007,0              | 2,31   | 13 754,1  | 3,30   |
| Eólica               | 198,5                | 0,23   | 237,7     | 0,06   |
| Biomassa             | 33,2                 | 0,04   | 24,2      | 0,01   |
| Total                | 87 002,5             | 100,00 | 416 368,5 | 100,00 |

Tabela 2.2: Configuração do SIN em 31 de dezembro de 2006  
[Fonte: ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

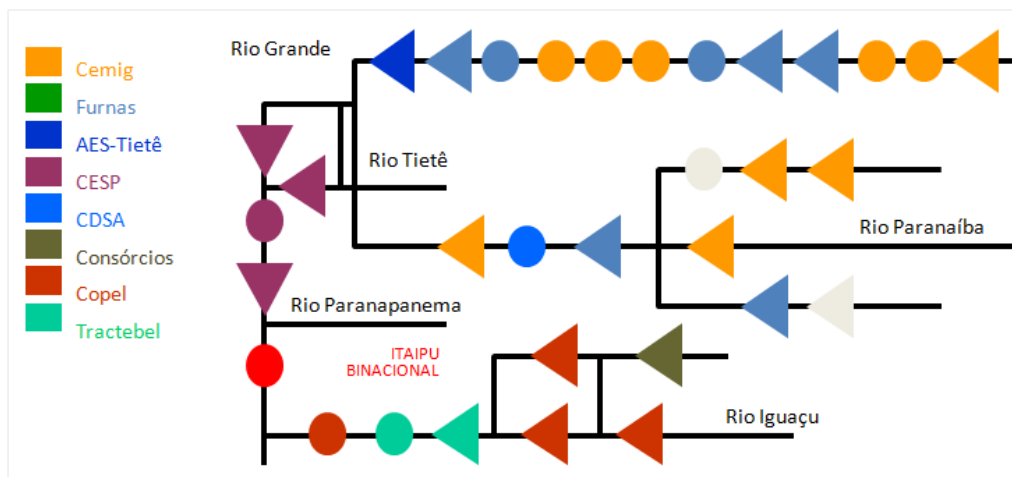


Figura 2.4: Diagrama esquemático para usinas do SE/CO e Sul

[Fonte: ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

As condições de fronteira para a elaboração do plano anual da operação energética do SIN – PEN – são dadas pelos planos de expansão da oferta e da demanda. A partir destas condições, com periodicidade anual e sujeito a revisões quadrimestrais, são estabelecidas as estratégias para o uso ótimo dos recursos energéticos, levando em conta as restrições de transmissão entre os subsistemas, considerando um horizonte de cinco anos. Entre os resultados, está a avaliação das condições de atendimento ao mercado previsto de energia elétrica do SIN e o estabelecimento do plano de controle de cheias para o primeiro ano.

O Programa Mensal de Operação Eletroenergética – PMO – baseado em previsões de aflúências e ajustes nas previsões de carga, define as metas de geração e as diretrizes eletroenergéticas para o próximo mês, discretizado em etapas semanais, tais como as metas de geração para cada usina, os intercâmbios interregionais, os programas de manutenção das unidades geradoras e dos equipamentos de transmissão. Adicionalmente, provê os custos marginais de operação para a CCEE (Câmara de Comercialização de Energia Elétrica), um dos insumos para a apuração do Preço de Liquidação de Diferenças (PLD).

A Programação Diária da Operação tem como objetivo o estabelecimento dos programas diários de geração hidráulica, térmica e intercâmbios do SIN em intervalos de 30 minutos, visando garantir a otimização energética dos recursos de geração e a segurança operacional, a partir das políticas e diretrizes do PMO. Para sua

elaboração são consideradas também as restrições elétricas entre e intra-subsistemas; os cronogramas de manutenção de unidades geradoras; o programa de intervenções em instalações da rede de operação; as restrições hidráulicas, de uso múltiplo das águas e ambientais e as restrições em instalações e equipamentos.

As informações reportadas neste item tem por base dados que podem ser encontrados no sítio do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), em particular consultando as páginas

[www.ons.org.br/avaliacao\\_condicao/planejamento\\_energetica.aspx](http://www.ons.org.br/avaliacao_condicao/planejamento_energetica.aspx) e

[www.ons.org.br/biblioteca\\_virtual/publicacoes\\_operacao\\_sin.aspx](http://www.ons.org.br/biblioteca_virtual/publicacoes_operacao_sin.aspx).

## 2.2 O problema de planejamento da operação

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de geração de energia elétrica abrange um largo espectro de atividades, desde o planejamento plurianual até a programação diária da geração dos reservatórios. O objetivo da operação ótima de um sistema hidrotérmico é determinar uma estratégia de operação que, para cada estágio do período de planejamento, dado o estado do sistema no início do estágio, forneça a meta de geração ótima para cada unidade neste estágio de acordo com um determinado critério. A definição desta estratégia requer, portanto, o estabelecimento de um objetivo a ser atendido. Normalmente tem-se adotado o critério de minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento, composto pelos custos dos combustíveis nas usinas térmicas, custos de importação de energia de sistemas vizinhos e eventuais penalidades pelo não atendimento à demanda.

O problema de planejamento da operação de um sistema hidrotérmico de grande porte como o brasileiro, cujas atividades abrangem um período que se estende por até vários anos, é caracterizado por ser (PEREIRA, 1985):

**acoplado no tempo:** a disponibilidade de estoques limitados de água nos reservatórios cria vínculo entre a decisão em um estágio e as conseqüências futuras desta decisão;

**acoplado no espaço:** a operação de uma usina hidroelétrica afeta a operação das usinas à jusante;

**de grande porte:** devido ao elevado número de unidades geradoras hidroelétricas e térmicas e à necessidade de uma otimização multi-período;

**não-separável:** o valor da energia gerada por uma usina hidroelétrica não pode ser avaliado diretamente como função do estado da usina de forma isolada, mas em termos da redução promovida nos custos futuros de geração térmica;

**não-linear:** os custos de operação das usinas termoelétricas são não lineares e a produção de energia hidroelétrica é uma função não-linear da vazão defluente e da altura de queda;

**estocástico:** devido à impossibilidade de se prever perfeitamente o futuro. No problema de planejamento da operação costuma-se representar explicitamente as incertezas acerca das afluições futuras.

Em resumo, a determinação da operação ótima de um sistema hidrotérmico é um problema de otimização não-linear, não-separável, multi-período, estocástico e de grande porte. Uma medida de sua complexidade pode ser dada pela revisão feita por (ROSENTHAL, 1980): nenhum dos 92 modelos apresentados na literatura, até aquela data, trata de todos esses aspectos simultaneamente. Esta situação não se modificou, conforme pode ser comprovado pela revisão do estado da arte dos modelos desenvolvidos para a operação ótima de sistemas de reservatórios feita por (LABADIE, 2004), mesmo considerando as mais recentes contribuições na área de programação linear, não-linear, programação dinâmica discreta, programação dinâmica diferencial, programação estocástica e programação heurística e avanços na capacidade de processamento computacional.

Portanto, devido ao seu porte e complexidade, a solução deste problema não pode ser alcançada com um único modelo, sendo necessária a sua divisão em diversas etapas. Nestas etapas são utilizados modelos com diferentes graus de detalhe para representação do sistema, abrangendo períodos de estudos com horizontes distintos (longo, médio e curto prazos), (PEREIRA; PINTO, 1984). Cada modelo fornece informações acerca de diferentes aspectos do problema geral. A Figura 2.5,

página 14, apresenta a cadeia de modelos usualmente utilizada para resolver este problema, onde se destaca que o grau de detalhe na representação do sistema cresce à medida em que se reduz o horizonte de influência das decisões (modelo agregado para o longo prazo, usinas individualizadas para o médio prazo e inclusão da representação da rede elétrica no modelo de curto prazo). Por sua vez, a incerteza com relação às afluências é maior para horizontes de planejamento de maior prazo. Nesta cadeia, o modelo de maior horizonte de planejamento fornece as condições de contorno para o modelo de menor horizonte imediatamente seguinte. Cabe ressaltar que cada um dos modelos fornece resultados para cada um dos estágios de discretização considerado, e não apenas resultados globais para todo o horizonte.

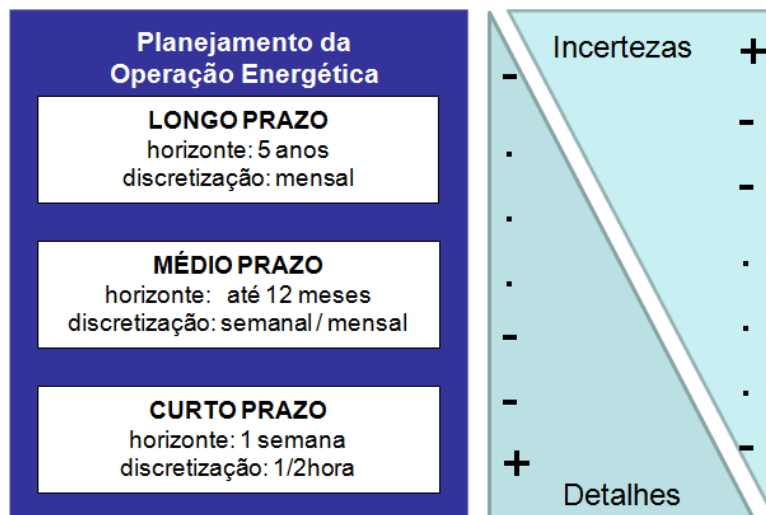


Figura 2.5: Representação esquemática da cadeia de modelos para planejamento da operação

[Fonte: Adaptado de ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

No longo prazo são realizados estudos para horizontes de até 5 anos à frente com o objetivo de definir quais serão as parcelas de geração hidráulica e térmica que minimizam o valor esperado do custo de operação, representando o parque hidroelétrico de cada subsistema por meio de um reservatório equivalente de energia. No médio prazo, a partir das informações obtidas no longo prazo, determinam-se as metas individuais de geração das usinas hidráulicas e térmicas do sistema, bem como os intercâmbios de energia entre empresas. Finalmente no curto prazo, define-se uma programação horária de geração que atenda as metas estabelecidas anteriormente, sujeita às condições operacionais da rede elétrica.

No caso do SIN, a cadeia atualmente em uso é composta pelos modelos NEWAVE, DECOMP e DESSEM. A função objetivo de toda esta cadeia consiste em minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento, composto de gastos com combustíveis nas unidades térmicas e eventuais déficits no atendimento.

A metodologia de Programação Dinâmica Dual Estocástica, proposta por (PEREIRA, 1989), foi utilizada no modelo para o planejamento de longo prazo, NEWAVE (COSTA et al., 1993). Na metodologia PDDE, a representação das incertezas das afluições futuras é feita por meio de um processo de amostragem da árvore de cenários, o que possibilita escapar da maldição da dimensionalidade às custas de admitir um intervalo de confiança para o valor da função objetivo. Este modelo define, para cada mês do período de planejamento, a alocação otimizada dos recursos de geração hidráulica e térmica, levando em conta a capacidade de regularização pluri-anual dos reservatórios e a probabilidade de déficits futuros. As usinas hidroelétricas são agregadas em reservatórios equivalentes de energia, (TERRY, 1980), correspondendo aos subsistemas Sudeste/Centro-Oeste, Sul, Nordeste e Norte, e as afluições, agregadas em afluições energéticas equivalentes (ENA), são representadas por meio de um modelo estocástico PAR(p). Os principais resultados do modelo são as metas de geração por subsistema e os intercâmbios de energia. Este modelo fornece a função de custo futuro para uso no modelo seguinte na cadeia, o modelo de médio prazo.

A técnica de solução proposta por (PEREIRA; PINTO, 1985), na qual a incerteza sobre as vazões afluentes nos diversos aproveitamentos do sistema é representada por meio de uma árvore de cenários de vazões mensais afluentes às usinas, com probabilidades associadas a cada ramo, foi utilizada no modelo DECOMP (COSTA et al., 1994). Este modelo, desenvolvido para aplicação no horizonte de médio prazo, determina as metas de geração para cada usina do sistema e representa as usinas hidroelétricas de forma individualizada, as restrições físicas das usinas hidráulicas associadas ao problema (conservação da água, limites de turbinamento, defluência mínima, armazenamento etc.) e demais restrições (atendimento à demanda, limites de intercâmbio, uso múltiplo da água etc.). Entre os resultados fornecidos por este modelo estão as metas de geração para cada usina hidroelétrica e termoeétrica, os intercâmbios entre os subsistemas e a função de custo futuro para uso no modelo de



curto prazo.

O problema de curto prazo (programação diária) DESSEM (MACEIRA et al., 2000) determina a geração de cada unidade geradora das usinas do sistema, levando em conta as restrições elétricas da rede — ainda que de forma simplificada, considerando um modelo de fluxo de potência linearizado com perdas. O intervalo de decisão é de 1/2 hora e o horizonte de planejamento se estende por até uma semana (168 horas). Nesta etapa, supõe-se que não há incertezas nas afluências, mas leva-se em conta a questão de “unit commitment” das diversas máquinas geradoras. Este problema é um problema de programação inteira mista, de grande porte e técnicas de aproximação são necessárias para a sua resolução. Entre os resultados estão as metas de geração hidráulica e térmica para cada uma das unidades geradoras e os fluxos nos circuitos.

Neste trabalho, o foco é o problema de planejamento da operação com horizonte de médio prazo.

# Capítulo 3

## Planejamento da operação de médio prazo e programação estocástica

Este capítulo descreve o marco teórico da formulação adotada para resolver o problema de planejamento da operação de médio prazo e está organizado em duas seções:

- na **primeira**, apresenta-se a formulação do problema de planejamento da operação de médio prazo; e
- na **segunda**, apresenta-se a metodologia de programação estocástica utilizada para resolver este problema.

### 3.1 Formulação do problema de planejamento da operação de médio prazo

O objetivo da operação ótima de um sistema hidrotérmico é determinar uma estratégia de operação que, para cada estágio do período de planejamento, dado o estado do sistema no início do estágio, forneça as metas de geração de cada usina neste estágio. O critério de otimização adotado é minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento, composto pelos custos dos combustíveis nas unidades térmicas e eventuais penalidades pelo não atendimento

da demanda. A formulação abaixo para este problema segue o que está descrito em (PEREIRA, 1985) e (COSTA et al., 1989).

Considerando conhecidas as afluências aos reservatórios em um estágio  $t$ , o problema de planejamento da operação pode ser expresso por meio da seguinte equação recursiva:

$$\alpha_t(X_t) = \mathbb{E}_{A_t|X_t} \left[ \min_{U_t} \left\{ C_t(U_t) + \frac{1}{\beta} \alpha_{t+1}(X_{t+1}) \right\} \right] \quad (3.1)$$

$$\forall t = T, T-1, \dots, 1, \quad \forall X_t$$

sujeito a

$$X_{t+1} = f_t(X_t, A_t, U_t)$$

$$g_{t+1}(X_{t+1}) \geq 0$$

$$h_t(U_t) \geq 0$$

$$\forall t = T, T-1, \dots, 1, \quad \forall X_t$$

onde

- $\alpha_t(\cdot)$  valor esperado do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento sob a hipótese de operação ótima;
- $X_t$  vetor de estado do sistema no início do estágio  $t$ . O vetor de estados deve incluir todas as variáveis que afetam o resultado da operação. No caso do problema de planejamento de médio prazo, em geral é representado pelo volume armazenado nos reservatórios ( $V_t$ ), em  $\text{hm}^3$ , e pela tendência hidrológica (por exemplo, o volume incremental afluente aos reservatórios no estágio anterior);
- $A_t$  vetor contendo o volume incremental, em  $\text{hm}^3$ , afluente aos reservatórios no estágio  $t$ ;
- $\mathbb{E}_{A_t|X_t}$  valor esperado sobre todas as possíveis afluências condicionadas ao vetor de estado  $X_t$ , que é conhecido no início do estágio;
- $C_t(U_t)$  custo de operação associado à decisão  $U_t$ , em  $\$/\text{MWh}$ ;

|                  |  |
|------------------|--|
| $U_t$            | vetor de decisão no estágio $t$ ; usualmente representado pelos volumes turbinados ( $Q_t$ ) e vertidos ( $S_t$ ) em cada usina hidroelétrica, em $\text{hm}^3$ , e a geração térmica ( $G_t$ ), em $\text{MWh}$ ; |
| $\beta$          | fator de desconto;   |
| $T$              | total de estágios no período de planejamento;  |
| $f_t(\cdot)$     | equação de transição de estado;  |
| $g_{t+1}(\cdot)$ | restrições associadas ao estado do sistema; e  |
| $h_t(\cdot)$     | restrições associadas às variáveis de decisão.   |

A equação de transição de estados corresponde à equação de conservação de água para cada usina hidroelétrica  $i$  pertencente ao conjunto  $\text{NH}$  de todas as usinas hidroelétricas do sistema:

$$V_{t+1}(i) = V_t(i) + A_t(i) - (Q_t(i) + S_t(i)) + \sum_{j \in M_i} (Q_t(j) + S_t(j))$$

onde

|          |  |
|----------|--|
| $M_i$    | conjunto de usinas imediatamente a montante da usina $i$ , $i = 1, \dots, \text{NH}$ ; |
| $Q_t(i)$ | volume turbinado pela usina $i$ no período $t$ , em $\text{hm}^3$ ; e                  |
| $S_t(i)$ | volume vertido pela usina $i$ no período $t$ , em $\text{hm}^3$ .                      |

As restrições associadas ao estado do sistema usualmente representadas são:

$$\underline{V_t(i)} \leq V_t(i) \leq \overline{V_t(i)}$$

onde  $\underline{V_t(i)}$  e  $\overline{V_t(i)}$  são, respectivamente, os limites inferior e superior de armazenamento, em  $\text{hm}^3$ , do reservatório  $i$  no estágio  $t$ .

As restrições associadas às variáveis de decisão usualmente representadas são:

$$\begin{aligned} \underline{G_t(j)} &\leq G_t(j) \leq \overline{G_t(j)} \\ \underline{Q_t(i)} &\leq Q_t(i) \leq \overline{Q_t(i)} \\ Q_t(i) + S_t(i) &\geq \underline{D_t(i)} \\ \forall t = 1, \dots, T \quad \forall i \in \text{NH}, \quad \forall j \in \text{NT} \end{aligned}$$

onde  $\underline{G_t(j)}$  e  $\overline{G_t(j)}$  são, respectivamente, os limites (capacidades) de geração mínimo e máximo, em  $\text{MWh}$ , para cada usina termoeletrica  $j$  pertencente ao conjunto  $\text{NT}$  de todas as usinas termoeletricas do sistema no estágio  $t$  e, para cada usina hidroelétrica  $i$ ,  $\underline{Q_t(i)}$  e  $\overline{Q_t(i)}$  são, respectivamente, os limites inferior e superior do volume

turbinado e  $\underline{D}_t(i)$  é o limite inferior do volume defluente total, em  $\text{hm}^3$ , no estágio  $t$ .

A restrição de atendimento à demanda (balanço de energia) em cada estágio  $t$  e para cada subsistema  $n$  é dada por:

$$\sum_{i \in \text{NH}(n)} \rho(i)Q_t(i) + \sum_{j \in \text{NT}(n)} G_t(j) + \sum_{i \in \text{Ni}(n)} f_{l,n,t} - \sum_{i \in \text{Ne}(n)} f_{n,l,t} = L_{n,t}$$

onde

- $n$  índice do subsistema;
- $\text{NH}(n)$  conjunto de usinas hidroelétricas no subsistema  $n$ ;
- $\text{NT}(n)$  conjunto de usinas termoelétricas no subsistema  $n$ . O não atendimento à demanda é representado por uma térmica de capacidade infinita e custo de operação igual ao custo do déficit;
- $\text{Ni}(n)$  conjunto de subsistemas dos quais o subsistema  $n$  importa energia;
- $\text{Ne}(n)$  conjunto de subsistemas para os quais o subsistema  $n$  exporta energia;
- $\rho(i)$  produtividade da usina  $i$ , em  $3,6 \times 10^{-3} \text{MW}/(\text{m}^3/\text{s})$ ;
- $G_t(j)$  geração térmica da usina termoelétrica  $j$  no período  $t$ , em  $\text{MWh}$ ;
- $f_{l,n,t}$  fluxo de energia do subsistema  $l$  para o subsistema  $n$ , em  $\text{MWh}$ ; e
- $L_{n,t}$  demanda de energia no subsistema  $n$ , em  $\text{MWh}$ .

O custo imediato associado à decisão  $\mathbf{U}_t$ ,  $C_t(\mathbf{U}_t)$ , usualmente corresponde ao custo de atender, com as usinas térmicas, a demanda remanescente. Na sua forma mais simples,  $C_t(\mathbf{U}_t)$  pode ser calculado da seguinte forma:

- calcular o total de geração hidro como:

$$\text{GH}_t(\mathbf{U}_t) = \sum_{i \in \text{NH}} \rho(i)Q_t(i)$$

Deve-se notar que a produtibilidade  $\rho(i)$  é uma função dos volumes armazenados ao início e final do período, dos volumes afluente, defluente, turbinado e evaporado ao longo do período e das diversas limitações, rendimentos e perdas do conjunto turbina-gerador ( $\text{NH}$  é o conjunto de todas as usinas hidroelétricas do sistema).

- usar as usinas térmicas para atender a carga remanescente a um custo mínimo e calcular o custo imediato de operação  $C_t(\mathbf{U}_t)$  resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
C_t(\mathbf{U}_t) = \min & \sum_{j \in \text{NT}(n)} CT_j(G_t(j)) \\
\text{s/a} & \sum_{j \in \text{NT}(n)} (G_t(j)) = L_{n,t} - GH_t(\mathbf{U}_t) \\
& \underline{G}_t(j) \leq G_t(j) \leq \overline{G}_t(j)
\end{aligned}$$

onde  $CT_j(G_t(j))$  é o custo de geração da térmica  $j$ . Nos problemas de planejamento da operação de médio prazo, este custo unitário costuma ser aproximado por uma função linear por partes e não são levadas em conta restrições operativas tais como: custos e tempos de tomada de carga ou desligamento, tempo mínimo em carga de cada usina etc.

A solução da recursão (3.1) pode ser obtida por meio de programação dinâmica estocástica, discretizando-se o vetor de estado do sistema. É fácil perceber que o número de estados discretizados, e conseqüentemente o esforço computacional, cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado, o que implica que a solução explícita desta recursão é impossível mesmo para sistemas com poucas usinas hidroelétricas.

## 3.2 Formulação do problema de programação estocástica

A programação estocástica é uma metodologia voltada para tratar problemas de otimização nos quais as incertezas são modeladas por meio de parâmetros aleatórios explicitamente expressos. Sua origem data do final dos anos 50, a partir dos artigos de (BEALE; DANTZIG; CHARNES; COOPER, 1955, , 1959 apud DUPAČOVÁ, 2002) ao observarem que, para muitos problemas de programação linear, os coeficientes não estavam todos disponíveis. Estes autores, então, sugeriram substituir o ponto de vista determinístico por um ponto de vista estocástico, assumindo que estes coeficientes desconhecidos ou parâmetros são variáveis aleatórias e que a sua

distribuição de probabilidades  $P$  é conhecida e independente das variáveis de decisão (DUPAČOVÁ, op. cit.) e (DUPAČOVÁ, 1995).

A programação estocástica é uma formulação do problema de decisões sob incerteza que permite tratar explicitamente as incertezas quantificáveis em um modelo de otimização e fornece decisões ótimas atendendo um critério especificado para a proteção contra os eventos futuros. O paradigma de programação estocástica pode ser descrito por um modelo de otimização e um modelo de incertezas e gerador de cenários acoplados (Figura 3.1, página 22). O modelo de otimização representa o problema que se quer resolver, explicitando a função objetivo e as restrições que precisam ser atendidas. O modelo de incerteza identifica o processo estocástico, define uma estrutura para a sua representação e gera os cenários.

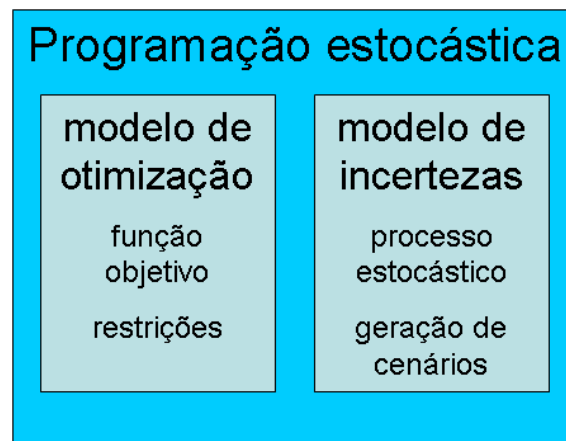


Figura 3.1: Paradigma de programação estocástica

[Fonte: Elaboração própria]

Para representar as incertezas futuras usualmente emprega-se uma árvore de cenários (Figura 3.2, página 23) que se ramifica para cada possibilidade de realização da variável aleatória. Uma árvore de cenários é uma representação estruturada dos elementos estocásticos e da maneira pela qual eles podem evoluir ao longo do período de tempo representado no problema. Os nós na árvore representam estados da natureza em instantes particulares do tempo (etapas ou estágios). O nó raiz corresponde ao estágio de decisão inicial, durante o qual nenhuma informação específica acerca das variáveis aleatórias foi ainda obtida. Os nós folha correspondem às decisões finais, que são tomadas após toda informação disponível ter sido obtida. Em modelos de programação estocástica, as decisões são tomadas nos nós; os arcos representam

as realizações das variáveis aleatórias. Um caminho nesta árvore é chamado cenário e consiste de realizações de todas as variáveis aleatórias em todas as etapas. Uma das propriedades mais importantes da representação em árvore é a manutenção das restrições de *não-antecipatividade* das decisões obtidas. Esta propriedade reflete o requisito que, sob incertezas, as decisões de planejamento devem ser implementadas antes que a realização da variável aleatória seja observada e, portanto, não pode ser baseada em qualquer realização particular da variável aleatória (SEN; HIGLE, 1999). Em outras palavras, cenários que compartilham a mesma história até um particular estágio devem também resultar nas mesmas decisões. Em verdade, a condição de não-antecipatividade garante que as soluções obtidas são implementáveis, i.e., as ações que precisam ser realizadas em um estágio específico dependem apenas das informações que estão disponíveis até aquele instante.

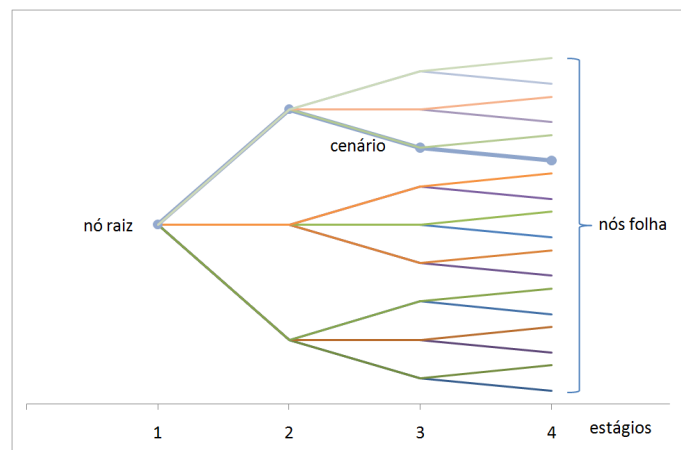


Figura 3.2: Árvore de cenários

[Fonte: Elaboração própria]

### 3.2.1 Modelo Básico

O modelo básico do problema de programação estocástica consiste em selecionar a decisão  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  “melhor possível” que atenda as restrições do problema, aceitando que as conseqüências desta decisão são influenciadas pela realização do evento aleatório  $\omega$ . No momento da decisão, a realização da variável aleatória não foi observada. Para definir a decisão usa-se o conhecimento da distribuição de probabilidades  $\mathbf{P}$  de  $\omega$ . O resultado da decisão  $x \in \mathcal{X}$  é quantificado como  $f(x, \omega)$ .



O requisito básico é encontrar uma decisão *antes* que os valores da realização dos parâmetros aleatórios possam ser observados, i.e., usando apenas informações disponíveis no momento da decisão acerca das suas distribuições de probabilidades. Este requisito é conhecido como *condição de não-antecipatividade*.

Naturalmente, um problema de otimização matemática no qual a função objetivo depende da realização de uma variável aleatória não faz muito sentido: diferentes realizações de  $\omega$  fornecem diferentes soluções ótimas sem qualquer indicação acerca de qual destas soluções é a “melhor”. Uma maneira de lidar com isso consiste em otimizar a função objetivo *em média*. Isto conduz à seguinte formulação geral de um problema de programação estocástica (WETS, 1989), :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbb{E}[f(\mathbf{x}, \omega)] & (3.2) \\
 \text{s/a} \quad & \mathbb{E}[f_i(\mathbf{x}, \omega)] \leq 0 \quad i = 1, \dots, k \\
 & \mathbb{E}[f_i(\mathbf{x}, \omega)] = 0 \quad i = k + 1, \dots, k + r \\
 & \mathbf{x} \in \mathcal{X}
 \end{aligned}$$

onde  $\omega$  é uma variável aleatória com suporte  $\Omega$ , distribuição de probabilidades  $\mathbf{P}$  e valor esperado  $\mathbb{E}[\cdot] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\cdot]$ . No caso de problemas estocásticos aqui considerados,  $\mathbf{P}$  é uma distribuição de probabilidades discreta e, para um dado conjunto de cenários possíveis, esta distribuição é completamente determinada pelo vetor  $\mathbf{p}$  de suas probabilidades.  $\mathcal{X}$  é o conjunto (fechado e não-vazio) de soluções viáveis e  $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  são, respectivamente, a função objetivo e as restrições do problema.

### 3.2.2 Problema de dois estágios

Problemas de decisão nos quais algumas decisões podem ser postergadas até que as incertezas tenham sido resolvidas, e estas decisões postergadas são definidas em função do cenário observado, são chamados de problemas de dois estágios. Para este tipo de problema, é usual particionar variáveis de decisão em dois conjuntos. As variáveis de primeiro estágio ( $\mathbf{x}$ ) são aquelas que devem ser decididas antes que a realização dos parâmetros incertos ocorra. Em seguida, uma vez que os eventos aleatórios tenham se realizado ( $\omega$ ), as decisões adicionais podem ser tomadas

ajustando-se, a um certo custo, as variáveis  $\mathbf{y}$  do segundo estágio (ou variáveis de recurso) para cada realização. O objetivo do problema consiste em escolher variáveis de primeiro estágio de forma que a soma dos custos do primeiro estágio e do valor esperado do custo aleatório do segundo estágio (ou recurso) seja mínimo.

A formulação geral de um problema de programação linear estocástico de dois estágios pode ser escrita como (RUSZCZYŃSKI; SHAPIRO, 2003):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] \} \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde, dada a decisão de primeiro estágio  $\mathbf{x}$ ,  $Q(\mathbf{x}, \xi)$  é o valor ótimo do problema de segundo estágio:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}, \xi) = \min_{\mathbf{y}} \quad & \{ \mathbf{q}^\top \mathbf{y} \} \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nesta formulação,  $\xi(\omega)$  é um vetor aleatório onde alguns ou todos os seus elementos  $(\mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{T}, \mathbf{W})$  podem ser aleatórios (i.e., depender de  $\omega$ ). O valor esperado em (3.3) é tomado com respeito a distribuição de probabilidades de  $\xi(\omega)$ , suposta conhecida. As matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{W}$  são chamadas de matrizes tecnológica e de recurso, respectivamente. Neste caso,  $\mathbf{x}$  é conhecido como a decisão de primeiro estágio, por vezes referida como decisão “aqui e agora”, (here and now). Cabe notar que  $\mathbf{x}$  não depende de  $\omega$ , sendo definida antes de se obter qualquer informação acerca das incertezas. Por sua vez, a variável de segundo estágio  $\mathbf{y}$  é determinada após a obtenção das informações acerca de  $\omega$ . O problema (3.4) é chamado de problema de segundo estágio ou subproblema de recurso. A solução ótima tende a apresentar a propriedade de que  $\mathbf{x}$  “deixa” a decisão de segundo estágio em uma condição de explorar as realizações favoráveis de  $\omega$ , sem estar excessivamente exposta às realizações adversas. Desta forma, reforça-se a necessidade de uma representação cuidadosa das incertezas: uma representação demasiadamente grosseira pode resultar em falha para representar adequadamente as realizações que influenciam a decisão de primeiro estágio, deixando o segundo estágio em um estado não-modelado de

vulnerabilidade. Por outro lado, uma representação excessivamente fina resulta em sobrecarga computacional (HIGLE, 2005).

Se a matriz  $W$  é fixa (não aleatória), o problema de dois estágios acima é dito de recurso fixo. O termo recurso refere-se à oportunidade de adaptar a solução para a realização específica de  $\omega$  observada. Num certo sentido, a função objetivo do problema de segundo estágio (3.4) pode ser vista como uma penalização pela violação da restrição  $Tx = h$ , cuja variável de folga é  $y$ , daí o nome “recurso”.

O conjunto de soluções viáveis do problema de segundo estágio (que depende de  $x$ ) pode ser vazio. Neste caso, define-se  $Q(x, \xi(\omega)) = +\infty$ . Então, se para algum  $x \in \mathcal{X}$ , o problema de segundo estágio for inviável, tem-se  $\mathbb{E}[Q(x, \xi(\omega))] = +\infty$  e, portanto, tal  $x$  não pode ser uma solução do problema de primeiro estágio. Logo, nos casos concretos, o problema de primeiro estágio deve ser resolvido para  $x \in \mathcal{X}$  de forma a se ter  $Q(x, \xi(\omega)) < +\infty$ . O problema é dito de recurso relativamente completo se para todo  $x \in \mathcal{X}$ , o conjunto de soluções viáveis do problema de segundo estágio é não-vazio (SHAPIRO, 2008).

Considerando distribuições discretas com um número finito de realizações (cenários)  $\xi_k = (q_k, h_k, T_k, W_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , cada uma com probabilidade  $p_k$  tem-se:

$$\mathbb{E}[Q(x, \xi(\omega))] = \sum_{k=1}^K p_k Q(x, \xi_k)$$

com  $Q(x, \xi_k)$  sendo o valor ótimo de (3.4). Neste caso, o problema de dois estágios (3.3) e (3.4) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min_{x, y_1, \dots, y_K} \quad & \{c^T x + \sum_{k=1}^K p_k q_k^T y_k\} & (3.5) \\ \text{s/a} \quad & Ax = b \\ & T_k x + W_k y_k = h_k, \quad k = 1, \dots, K \\ & x \geq 0 \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

Este problema pode ser resolvido como um único problema de programação linear de grande porte, conhecido como Equivalente Determinístico. Entretanto, quando o número de cenários é elevado, é mais conveniente — e, por vezes, a única

maneira de viabilizar a sua resolução — usar métodos de solução que tomem partido da particular estrutura do problema. Estes métodos, tipicamente, fazem uso de estratégias de decomposição do problema. O primeiro procedimento proposto para resolver o problema de programação estocástica linear com recurso é o chamado método L-Shaped (van-SLYKE; WETS, 1969). Este método decompõe o problema por estágio: o problema de primeiro estágio é chamado de “problema mestre” e o problema de segundo estágio é chamado de “subproblema”. Na verdade, este método é simplesmente uma adaptação da decomposição de Benders (BENDERS, 1962) para a estrutura do problema de segundo estágio. Se o problema for de recurso completo, ou de recurso relativamente completo, sua aplicação garante que a solução ótima do problema pode ser identificada. Diversos aperfeiçoamentos ao método L-Shaped têm sido propostos: por exemplo, (RUSZCZYŃSKI, 1986) sugere aproximar a função objetivo do problema de segundo estágio por uma representação multi-cortes (i.e., um corte para cada cenário ao invés do corte médio), que vem a ser uma adaptação da metodologia básica de planos cortantes investigada por (BIRGE; LOUVEAUX, 1988).

### 3.2.3 Problema multi-estágio

Os problemas de dois estágios, descritos no item anterior, tratam da situação em que é preciso tomar uma decisão “aqui e agora”, antes da realização da variável aleatória  $\omega$ , seguida por outra decisão tomada após esta informação se tornar disponível. Este processo de decisão pode ser descrito como:

$$\text{decisão } (\mathbf{x}_1) \rightsquigarrow \text{observação } (\xi_2) \rightsquigarrow \text{decisão } (\mathbf{x}_2).$$

Em muitas situações, o padrão acima se repete ao longo do tempo, i.e., as incertezas  $(\xi_1, \dots, \xi_T)$  são reveladas gradualmente ao longo do tempo  $t$ , e o processo de decisão tem a forma:

$$\begin{aligned} \text{decisão } (\mathbf{x}_1) \rightsquigarrow \text{observação } (\xi_2) \rightsquigarrow \text{decisão } (\mathbf{x}_2) \rightsquigarrow \\ \dots \rightsquigarrow \text{observação } (\xi_T) \rightsquigarrow \text{decisão } (\mathbf{x}_T). \end{aligned}$$

no qual as decisões  $x_t := x_t(\xi_{[t]})$ , tomadas em cada estágio  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , têm por base a informação  $\xi_{[t]} := (\xi_1, \dots, \xi_t)$  disponível até o estágio corrente  $t$ , mas não as observações futuras (condição de não-antecipatividade).

Este processo pode ser modelado como um problema estocástico multi-estágio. A abordagem padrão para resolver estes problemas consiste em usar a formulação na qual as incertezas estão representadas por uma árvore de cenários. No período inicial, o nó raiz está associado ao valor (determinístico)  $\xi_1$ . No período  $t = 2$  tem-se tantos nós quantas forem as diferentes realizações de  $\xi_2$  consideradas. Cada realização está ligada ao nó raiz por um arco. Para cada nó  $i$  no estágio  $t = 2$ , correspondente a uma particular realização  $\xi_2^i$  de  $\xi_2$ , são considerados tantos nós para o estágio  $t = 3$  quantas forem as realizações de  $\xi_3$  que sucedem  $\xi_2^i$ , que são conectadas ao nó  $i$  etc. De forma geral, os nós do estágio  $t$  correspondem aos possíveis valores de  $\xi_t$  que podem ocorrer. Cada nó  $\xi_t^i$  no estágio  $t$  está conectado a um único nó no estágio  $t-1$ , chamado antecessor e também está conectado a diversos nós no estágio  $t+1$ , chamados sucessores. A cada arco nesta árvore, conectando o nó  $\xi_t^i$  com o seu sucessor  $\xi_{t+1}^{i,j}$  está associada a probabilidade condicional  $p_{i,j}$  tal que  $\sum_j p_{i,j} = 1$ . Um cenário é um caminho nesta árvore que vai do nó raiz até um nó no estágio final  $T$ , i.e., cada cenário corresponde à uma particular realização  $\xi_{[T]} = (\xi_1, \dots, \xi_T)$  do processo estocástico considerado. A probabilidade de um cenário é dada pelo produto das probabilidades condicionadas  $p_{i,j}$  correspondentes aos arcos do seu caminho.

A Figura 3.3, página 29, ilustra uma árvore para um problema de quatro estágios. Em geral, cada nó na árvore corresponde a uma coleção de cenários em um estágio específico. Para o nó  $n$  assinalado nesta figura, correspondente ao estágio 2, considere o conjunto de cenários denotados  $S(n)$ , sombreados na figura. No segundo estágio, estes cenários não podem ser distinguidos entre si: mesmo que seja possível reconhecer que estes cenários correspondem ao nó  $n$ , não é possível afirmar qual dos cenários em  $S(n)$  ocorrerá. A solução correspondente a este nó  $n$ , de forma a ser implementável, deve ser única para todas estas realizações. Esta afirmação vale, *mutatis mutandis*, para todos os nós da árvore.



$t$ , dos coeficientes da função objetivo, das matrizes de transição e de recurso, do lado direito das restrições e dos limites das variáveis. Finalmente,  $p_{k_T} \equiv p_s$  são as probabilidades individuais de cada um dos cenários completos (i.e., realizações desde a raiz da árvore até a folha), obtidas pela multiplicação das probabilidades condicionais dos arcos. As restrições de não-antecipatividade são atendidas implicitamente nesta formulação.

### 3.2.4 Representação das incertezas

O uso de modelos para tomada de decisão sob incertezas requer a representação destas incertezas de forma adequada para uma implementação computacional. Isto pode ser alcançado utilizando uma aproximação discreta e de tamanho limitado para a distribuição multivariada subjacente das incertezas, que sirva como dado de entrada para o modelo de otimização estocástica.

Em geral, o processo de geração de cenários pode ser resumido nos seguintes passos:

1. escolher um processo estocástico apropriado para caracterizar o comportamento das variáveis aleatórias subjacentes;
2. calibrar o modelo (estimar os parâmetros) a partir dos dados; e
3. gerar os cenários usando o modelo calibrado.

Para os casos em que os principais fatores aleatórios do processo estocástico subjacente já foram identificados e um número suficiente de cenários pode ser gerado a partir do modelo calibrado, o passo seguinte é delinear a estrutura inicial da árvore de cenários, i.e., o número de estágios e o esquema de ramificação. Esta estrutura deve atender o requisito básico de fornecer resultados robustos e estáveis para o problema de otimização. A definição dos estágios está ligada à possibilidade de tomada de decisões adicionais à medida em que novas informações acerca das incertezas se tornem disponíveis. Uma estratégia usual para definir o esquema de ramificação consiste em considerar um número decrescente de ramos à medida em que os estágios avançam no tempo.

Exceto em situações muito específicas, não se dispõe do conhecimento completo da distribuição de probabilidades subjacente, além de ser necessário recorrer a aproximações para se ter problemas numericamente tratáveis. Ou seja, a cardinalidade do suporte da distribuição discreta é limitada pela disponibilidade de recursos computacionais e pela complexidade do modelo de otimização. Desta forma, exceto em casos muito simples, as distribuições dos parâmetros estocásticos necessitam ser aproximadas por distribuições discretas com um número limitado de realizações.

Considere que  $\xi(\omega)$  pode ser aproximado por um número finito de realizações possíveis  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K$ , chamadas cenários, com respectivas probabilidades  $p_k \in (0, 1), k = 1, 2, \dots, K$ . De modo a assegurar que as propriedades da distribuição amostral estão próximas daquelas da distribuição multivariada subjacente, o número de realizações  $K$  é elevado e aumenta exponencialmente com a dimensão de  $\xi$ . Esta situação ocorre quando cada componente do vetor aleatório  $\xi$  possui um número de valores possíveis que independe dos valores assumidos pelos outros componentes. O total de cenários, então, é o produto do número de valores possíveis de cada componente de  $\xi$ , o que torna inviável a solução do problema de otimização em um tempo razoável.

Diversos enfoques têm sido desenvolvidos para tratar esta "explosão da dimensionalidade", (KAUT; WALLACE, 2003), sendo a mais usual considerar uma árvore reduzida de eventos – na qual cenários relevantes são presumivelmente representados e cuja estrutura (abertura e número de estágios) seja definida criteriosamente, tendo por base o compromisso entre a representatividade e a viabilidade computacional. Pode-se citar dentre estas, a técnica estatística de agregação em conglomerados (clusters) (HARTIGAN; WONG, 1979) e a técnica de redução de cenários (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003). A primeira é usual em diversas aplicações estatísticas voltadas à classificação e sua aplicação no contexto de programação estocástica foi mencionada por Birge e Mulvey (1996) e aplicada em Canestrelli e Giove (1999), (BIRGE; MULVEY; CANESTRELLI; GIOVE, 1996, 1999 apud DUPAČOVÁ; CONSIGLI; WALLACE, 2000), enquanto que a segunda foi proposta especificamente no contexto de otimização estocástica. Ambas são aplicadas a uma amostra aleatória originalmente gerada pelo processo estocástico, resultando em uma sub-amostra não equi-provável da distribuição multivariada de



probabilidades do vetor aleatório  $\xi(\omega)$ .

Uma abordagem alternativa/complementar para tratar a explosão da dimensionalidade consiste em percorrer cenários *selecionados* da árvore completa. (PEREIRA, 1989) propôs o primeiro método que faz uso de amostragem em programação estocástica, chamado Programação Dinâmica Dual Estocástica (SDDP, Stochastic Dual Dynamic Programming), e o aplicou no contexto de planejamento hidrotérmico. Desde sua publicação, outras abordagens para resolver o problema multi-estágio foram sugeridas, entre as quais os métodos de decomposição aninhada, (BIRGE, 1985), e de decomposição aninhada reduzida (AND, Abridged Nested Decomposition), proposta por (DONOHUE; BIRGE, 2006). Este método adapta o esquema de amostragem para ajustar-se à estrutura da árvore de cenários e, em particular, tem um bom desempenho para árvores com muitos ramos, enquanto que o método SDDP é melhor adaptado para árvores com muitos estágios e poucas aberturas por estágio. Podem ainda ser mencionados o método de amostragem reduzida (Reduced Sampling, ReSa) proposto por (HINDSBERGER; PHILPOTT, 2001), que incorpora algumas das idéias de AND em um esquema de amostragem para árvores com muitos estágios e poucas aberturas por estágio e o algoritmo de planos cortantes e amostragem parcial, CUPPS (Convergent cutting-plane and partial-sampling algorithm), proposto por (CHEN; POWELL, 1999). A seleção dos cenários a serem utilizados pelo modelo de otimização pode ser realizada uma única vez (como é o caso das implementações usuais de SDDP) ou então os cenários podem ser selecionados a cada iteração do algoritmo. Existe prova de convergência para estes algoritmos quando esta segunda alternativa de percurso da árvore é adotada (PHILPOTT; GUAN, 2007).

Outra forma de se estimar a solução do problema consiste em adotar a aproximação média amostral de um processo baseado em métodos de Monte Carlo (KLEYWEGT; SHAPIRO; MELLO, 2002), no qual diversas árvores são construídas e adota-se como valor ótimo a média amostral dos valores ótimos obtidos a partir de cada uma das árvores.

## Capítulo 4

# Árvore de cenários representativa e de tamanho limitado

Existem diversos métodos de geração ou de construção de cenários para representar as incertezas em problemas de programação estocástica multi-estágio, entre os quais podem ser mencionados, (DUPAČOVÁ; CONSIGLI; WALLACE, 2000) e (KAUT; WALLACE, 2003):

- geração condicionada a partir de um modelo estocástico paramétrico;
- geração de amostras de forma a igualar os momentos (média, variância, assimetria, curtose, correlações,...) e outras propriedades estatísticas dos dados amostrados, sem especificar a distribuição de probabilidades subjacente;
- métodos de geração de cenários que representam a evolução do processo estocástico do período inicial até o horizonte. O resultado não é propriamente uma árvore de cenários, mas um conjunto de realizações do processo que pode ser transformado em árvore utilizando técnicas de agregação;
- geração de amostra utilizando técnicas Quasi-Monte Carlo (seqüências de baixa discrepância); e
- geração de amostra seguido de redução usando uma aproximação ótima com respeito a uma métrica de probabilidades.

O mais comum destes métodos é a geração condicionada de uma árvore de eventos tendo por base uma representação estocástica do fenômeno aleatório. A cada nó da árvore de cenários, diversos valores do processo estocástico  $\xi_t$ , condicionados às ocorrências passadas, são amostrados a partir de modelos de séries temporais, por exemplo, modelos lineares auto-regressivos. Amostras de processos multivariados independentes podem ser obtidas a partir de sorteios de cada uma das distribuições marginais dos componentes univariados, combinando-os posteriormente. O problema óbvio é que o tamanho da árvore cresce exponencialmente com a dimensão do vetor aleatório. Se as variáveis são correlatadas, uma alternativa é especificar as distribuições marginais e a correspondente matriz de correlação ou então identificar as componentes principais do espaço das variáveis, as quais por construção são independentes, e sorteá-las. Uma vantagem adicional desta segunda abordagem é se ter uma redução da dimensionalidade do espaço. Existem vários modos de melhorar o processo de amostragem, como por exemplo métodos Quasi Monte Carlo, que visam gerar amostras não aleatórias que cobrem uniformemente o espaço amostral.

Um condicionante do uso de árvores de cenários para representar as incertezas é o número de cenários que deve ser tratado pelo modelo de otimização. Este número deve ser criteriosamente escolhido de modo a não onerar desnecessariamente o algoritmo de solução e ser suficiente para representar o espectro das possíveis evoluções futuras das incertezas ao longo do período de estudo. Como o número de cenários cresce exponencialmente com a abertura de sucessores de cada nó a cada estágio, a escolha da estrutura da árvore deve ser guiada pela importância das decisões operativas de interesse.

Ao representar as incertezas por meio de uma árvore de cenários, estes devem ser representativos do universo de possíveis evoluções do processo estocástico partindo do nó raiz da árvore (condição inicial) até os nós folhas (horizonte de planejamento). No caso do problema de planejamento da operação do Sistema Interligado Nacional, deve ser considerado também o elevado número de usinas da configuração do parque hidroelétrico cujas vazões devem ser geradas para cada cenário. A modelagem estocástica das incertezas deve capturar não só a dependência temporal das vazões afluentes a cada usina, mas também a dependência espacial entre estas vazões, o que torna complexo atender o requisito de a árvore ser dimensionada de modo que seus

cenários capturem todo o espectro de evoluções futuras de vazões afluentes a todas usinas do parque hidroelétrico. Por exemplo, caso fossem consideradas 100 usinas e para cada uma delas se desejasse considerar apenas a ocorrência de afluências (condicionadas) altas e baixas, o total de cenários seria de  $2^{100}$ , cerca de  $10^{30}$ , apenas para o primeiro estágio. Em resumo, o elevado número de usinas hidroelétricas faz com que a dimensão do espaço de estados seja grande, o que acarreta ser necessário um elevado número de cenários eqüiprováveis para representar adequadamente este processo multivariado.

Embora o uso de modelos estocásticos para geração de cenários sintéticos permita produzir um número arbitrariamente elevado de realizações a partir de cada condição inicial definida pelo nó em consideração, não é viável tratar computacionalmente problemas de otimização estocástica com esta dimensão. É preciso, portanto, selecionar estas realizações de modo que a árvore de cenários atenda, a um só tempo, tanto o critério de parcimônia requerido para viabilizar o seu uso em modelos de otimização estocástica quanto o de representatividade do universo das possíveis evoluções futuras modeladas por aquele processo estocástico, de forma que as decisões apontadas pelo modelo sejam apropriadas.

## 4.1 Modelo BONSAI

O modelo BONSAI, cuja descrição detalhada pode ser encontrada em (PSR, 2004a), (PSR, 2004b), foi desenvolvido com o objetivo de fornecer árvores representativas de cenários de afluências com tamanho limitado e estrutura definida, para uso no planejamento da operação energética de médio prazo de sistemas hidrotérmicos.

O enfoque adotado para representar as incertezas é composto pelos seguintes elementos, descritos com mais detalhes a seguir:

1. um modelo estocástico para as afluências;
2. uma estrutura definida para a árvore limitada e representativa; e
3. um procedimento de seleção dos cenários que formam a árvore reduzida.

### 4.1.1 Modelo estocástico das afluições

As séries históricas de vazões mensais afluentes aos postos hidrológicos apresentam uma estrutura de dependência temporal e espacial. Esta estrutura pode ser capturada por meio de modelos de séries temporais lineares multivariados, do tipo Box-Jenkins (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994). Como as séries de vazões apresentam um comportamento sazonal, a abordagem inicialmente proposta para representar este processo estocástico consiste em dessazonalizar a série de afluições, subtraindo das observações a média sazonal e dividindo o resultado pelo desvio padrão sazonal para, em seguida, ajustar um modelo ARMA à série dessazonalizada.

A principal limitação desta abordagem é supor a série resultante estacionária, o que nem sempre é alcançado com esta transformação. Esta dificuldade pode ser superada usando modelos do tipo periódicos auto-regressivos PAR(p), propostos por (HIPEL; MCLEOD, 1994), que permitem que os parâmetros e a ordem do modelo variem de acordo com a estação do ano. Modelos estocásticos periódicos auto-regressivos mensais vêm sendo largamente empregados em hidrologia (SALAS, 1993) e, em particular, no sistema hidroelétrico brasileiro (GUERRERO-SALAZAR et al., 1977) e (MACEIRA; PENNA; DAMAZIO, 2005).

O procedimento usual de ajuste destes modelos inicia-se por escolher a ordem do modelo de forma que os ruídos resultantes sejam brancos. Em seguida, os parâmetros de modelo são estimados pelo método dos momentos ou de máxima verossimilhança. Estes parâmetros são escolhidos de forma a preservar a dependência temporal (serial) entre as vazões. A dependência espacial entre as vazões afluentes aos postos é modelada via o vetor de ruídos que apresentam distribuição multivariada normal, cuja matriz de covariâncias é estimada de modo a capturar as covariâncias cruzadas entre as vazões correspondentes.

Para os propósitos de aplicação no planejamento de médio prazo, optou-se por ajustar às séries incrementais de vazões naturais afluentes o modelo periódico auto-regressivo de ordem um – PAR(1) – para cada posto de vazão associado a uma usina hidroelétrica. Este modelo, no caso univariado, reproduz apenas a persistência temporal mês a mês, como uma cadeia de Markov, sendo equivalente ao modelo clássico de Thomas-Fiering (THOMAS; FIERING, 1962). Sabe-se que esta formulação apli-

cada a estágios mensais não  capaz de capturar fenmenos de mais longo prazo, tais como a ocorrência de secas de vários anos de duraao (período crítico). Entretanto, para os propósitos da aplicaao ao planejamento da operaao de médio prazo, com horizonte de alguns meses, a aplicaao de cenários gerados desta forma não deve comprometer a soluao do problema de primeiro estágio, já que ao adotar a estratégia de decomposiao do problema em etapas (cadeia de modelos) que tratam dos diferentes horizontes de planejamento, supo-se que os fenmenos de mais longa duraao foram adequadamente considerados na etapa de longo prazo. A dependência espacial entre as vazões  representada via o vetor de ruídos do modelo univariado PAR(1) de cada posto, o qual, embora serialmente independente,  espacialmente correlatado, capturando as correlaoes cruzadas entre as vazões afluentes às usinas.

Seja  $q_{t,\tau}^j$  a vazão média incremental<sup>1</sup> mensal correspondente ao ano  $t, t = 1, \dots, Na$ , e ms  $\tau$  afluente a um posto hidrológico  $j$ , referente a uma usina hidroelétrica ou reservatório da configuraao em foco.  usual supor que estas vazões incrementais são adequadamente modeladas por uma distribuiao log-normal cujos parâmetros são estimados de forma a preservar as médias e desvios padrões das vazões mensais correspondentes. Assim, seja  $y_{t,\tau}^j$  o logaritmo da vazão incremental  $q_{t,\tau}^j$  afluente ao posto  $j$  no ano  $t$  e ms  $\tau$ , assumida como variável aleatória normalmente distribuída com média  $\mu_\tau^j$  e variância  $\sigma_\tau^{j2}$ . O ajuste do modelo PAR(1) para as vazões incrementais mensais de cada usina  $j$   feito a cada mês da seguinte forma. Inicialmente estima-se, a partir da série histórica de vazões  $q_{t,\tau}^j$  para cada mês  $\tau, \tau = 1, \dots, 12$ , a respectiva média amostral  $m_\tau^j \left( = \frac{1}{Na} \sum_{t=1}^{Na} q_{t,\tau}^j \right)$  e desvio padrão amostral  $s_\tau^j \left( = \sqrt{\frac{1}{(Na-1)} \sum_{t=1}^{Na} \left( q_{t,\tau}^j - m_\tau^j \right)^2} \right)$ . A partir destes valores, obtm-se os respectivos parâmetros mensais da distribuiao marginal log-normal estimados pelo método dos momentos, resolvendo-se o seguinte sistema de equaoes para  $\mu_\tau^j$  e  $\sigma_\tau^j$ , (YEVJEVICH, 1972):

---

<sup>1</sup>Vazão afluente correspondente  área de drenagem incremental do posto  $j$ . Nos estudos de médio prazo, com intervalo mensal, em geral aproxima-se a vazão incremental pela diferença entre a vazão total afluente ao posto  $j$  e a soma das vazões totais afluentes aos postos imediatamente a montante.

$$\begin{cases} m_{\tau}^j = \exp\left(\mu_{\tau}^j + \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^{j2}\right) \\ s_{\tau}^{j2} = m_{\tau}^{j2}\left(\exp\left(\sigma_{\tau}^{j2}\right) - 1\right) \end{cases}$$

Para cada usina e a cada mês, a transformação log-normal de parâmetros média  $\mu_{\tau}^j$  e desvio padrão  $\sigma_{\tau}^j$  é adotada para recair-se numa distribuição marginal normal.

Seja  $x_{t,\tau}^j = (y_{t,\tau}^j - \mu_{\tau}^j)/\sigma_{\tau}^j$  a variável aleatória normal com média zero, variância unitária e autocorrelação serial  $\rho_{\tau}^j$ . O modelo PAR(1) para o mês  $\tau$  é expresso como (ver, por exemplo (KOTTEGODA, 1980) ou (HIPEL; MCLEOD, 1994)):

$$x_{t,\tau}^j = \rho_{\tau}^j \times x_{t,\tau-1}^j + \sqrt{(1 - \rho_{\tau}^{j2})} v_{\tau}^j \quad (4.1)$$

onde  $v^j$  é um vetor de ruídos serialmente não correlatados e normalmente distribuídos com média zero. (Para  $\tau = 1$ , faz-se  $t = t - 1$  e  $\tau = 12$ ).

Seja  $v_{\tau}$  o vetor de ruídos serialmente não correlatados e normalmente distribuídos com média zero e matriz de covariância  $\Sigma_{\tau}$  estimada a partir da série multivariada de ruídos oriunda da aplicação dos modelos PAR(1) às séries históricas das variáveis aleatórias  $x_{t,\tau}^j$ . É o vetor de ruídos  $v_{\tau}^j$  que incorpora a dependência espacial, enquanto que o modelo para cada posto representa a dependência serial entre as vazões. Aplicando a fatorização de Cholesky, (LIMA, 2004),  $\Sigma_{\tau} = C_{\tau}C_{\tau}^T$ , o vetor de ruídos espacialmente correlatados  $v_{\tau}$  pode ser escrito como  $v_{\tau} = C_{\tau}g$ , onde  $g$  é um vetor aleatório normal padrão.

Por meio deste esquema, é possível construir um modelo multivariado de grande porte com relativamente poucos parâmetros:  $\mu_{\tau}^j, \sigma_{\tau}^j$  e  $\rho_{\tau}^j$  para cada posto e a matriz de carga triangular  $C_{\tau}$ . Uma simplificação geralmente adotada consiste em admitir que a estrutura de dependência espacial é constante ao longo dos meses, fazendo  $\Sigma = \Sigma_{\tau}$  e  $C = C_{\tau}, \forall \tau$ .

O processo de geração de cenários pode ser resumido nos seguintes passos:

1. estimar a matriz de correlação espacial  $\Sigma$  a partir do ruído histórico  $v_{\tau}$  e
  - (a) obter a matriz de carga  $C$  tal que  $CC^T = \Sigma$ ;

2. sortear o ruído multivariado  $\mathbf{g}$  independente e identicamente distribuído (**iid**), com  $\mathbf{g}_i \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é igual ao número de postos;
3. aplicar a matriz de carga  $\mathbf{C}$  e obter  $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{C}\mathbf{g}$ , ruído espacialmente correlatado;
4. aplicar o modelo PAR(1) (equação 4.1) para cada posto principal  $i$  e obter  $\mathbf{x}_{t,\tau}^j$ , variável aleatória normal com média zero, variância unitária e autocorrelação serial  $\rho_\tau^j$ ;
5. calcular  $\mathbf{y}_{t,\tau}^j = \boldsymbol{\mu}_\tau^j + \boldsymbol{\sigma}_\tau^j \times \mathbf{x}_{t,\tau}^j$ ; e
6. calcular a sua vazão incremental  $\mathbf{q}_{t,\tau}^j = \exp(\mathbf{y}_{t,\tau}^j)$

Repetindo-se os passos 2 a 6, é possível produzir uma amostra de vazões de tamanho arbitrariamente elevado. Note que os parâmetros média e desvio padrão da distribuição log-normal multivariada de  $\mathbf{y}_{t,\tau}^j$ , condicionada ao valor inicial  $\mathbf{x}_0$  são, respectivamente,  $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}_0}$  e  $(\mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\rho \boldsymbol{\Sigma})$ , onde  $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}_0}$  é o vetor cujas componentes são  $(\boldsymbol{\mu}_\tau^j + \rho_\tau^j \boldsymbol{\sigma}_\tau^j \mathbf{x}_0^j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\mathbf{D}_\sigma = \text{diag}(\sigma_\tau^1, \dots, \sigma_\tau^n)$  e  $\mathbf{D}_\rho = \text{diag}((1 - \rho_\tau^{1^2}), \dots, (1 - \rho_\tau^{n^2}))$  são matrizes diagonais.

#### 4.1.2 Estrutura da árvore

Tendo em vista que a árvore de cenários deve ter tamanho reduzido para não onerar o esforço computacional, propõe-se uma estrutura para a árvore tal que a abertura a cada estágio seja em quantidade suficiente para permitir a ocorrência de distintas condições de aflúncias aos subsistemas SE/CO, S, Ne e N, numa classificação qualitativa, definida via “padrões” suficientes para diferenciá-las. A abertura deve ser variável ao longo dos estágios, enfatizando a maior relevância de um amplo espectro de combinações de padrões nos estágios iniciais e simplificando os demais estágios de forma a reduzir explosão combinatorial (combinação de cenários).

Uma maneira de obter uma amostra reduzida e representativa consiste em empregar técnicas de agrupamento e utilizar a amostra reduzida formada pelos representantes de cada conjunto considerado semelhante. Nestes casos, a probabilidade de ocorrência de cada elemento da amostra reduzida (o “representante”) é estimada



pela soma das probabilidades de todos os elementos da classe representada (os “representados”). Esta abordagem foi utilizada por (JARDIM; MACEIRA; FALCÃO, 2001) para agregar o vetor multivariado das vazões afluentes em representantes, usando a técnica de agrupamento (cluster).

Uma abordagem alternativa é reduzir a dimensionalidade do espaço de estados utilizando, por exemplo, a Análise de Componentes Principais (ACP), antes de empregar técnicas para definir uma amostra representativa.

Considerando como eixos de agregação as energias naturais afluentes aos reservatórios equivalentes de energia dos subsistemas usualmente representados no SIN, a diversidade espacial entre as realizações candidatas geradas pelo modelo estocástico multivariado pode ser capturada pelas combinações dos “padrões” alto (A), médio (M) e baixo (B) de energias afluentes aos  $n$  sistemas. Esse processo gera, então, representantes de classes  $n$ -variadas  $(A, M, B)^n$  ou  $(A, B)^n$ . Com uma abertura, no primeiro estágio estocástico, de  $3^4 = 81$  cenários, seria possível retratar todas as combinações de padrões de energias altas (A), médias (M) e baixas (B) nos subsistemas SE/CO, S, NE e N. No estágio seguinte, com abertura de  $2^4 = 16$ , seria possível retratar os padrões A e B para cada subsistema (para reduzir o crescimento exponencial, neste estágio não se considera o padrão M). A cardinalidade (número de cenários) da árvore com dois estágios estocásticos, com esta estrutura, seria portanto  $(81 \times 16)$ , perfazendo um total de  $(1 + 81 + 81 \times 16) = 1378$  nós. Caso fosse considerado o terceiro estágio, poderia ter-se uma abertura ainda mais exígua, agregando-se o sistema gerador em apenas dois subsistemas (SE/CO-S e N/NE) e considerando apenas os padrões A e B, o que resultaria em  $2^2 = 4$  aberturas a partir de cada nó. A cardinalidade da árvore com três estágios estocásticos com esta estrutura (denotada  $81 \times 16 \times 4$ ) seria portanto  $5184$  com um total de  $(1 + 81 + 81 \times 16 + 81 \times 16 \times 4) = 6562$  nós. Para horizontes de planejamento maiores, as séries de vazões partindo dos nós nos estágios seguintes teriam apenas um sucessor para cada nó, de modo que daí em diante o crescimento da árvore seria linear em termos de nós, sem aumentar o número de cenários. Cabe observar que estes estágios adicionais, em termos do problema de otimização, são determinísticos, i.e., não contribuem para uma melhor representação das incertezas — tudo se passa como se em cada rama a partir do terceiro estágio estocástico não houvesse

incertezas, sendo as decisões tomadas “sob medida” para cada ramo.

Na abordagem que utiliza a ACP, a redução da dimensionalidade é obtida diretamente no espaço das vazões afluentes, considerando apenas o subespaço gerado por um número reduzido de componentes principais como eixos de agregação e discretizando cada eixo em intervalos correspondentes aos padrões (A, M, B). A mesma lógica de abertura descrita acima é então aplicada. Estas duas abordagens serão descritas com mais detalhes a seguir.

Em resumo, a estrutura proposta para a árvore tem por base os seguintes pontos:

- os estágios possuem aberturas decrescentes à medida que se avança no tempo, enfatizando maior relevância de um amplo espectro de combinações de padrões nos estágios iniciais;
- reduz-se a dimensão do espaço de estados, considerando um número limitado de eixos de agregação;
- a diversidade espacial entre as realizações candidatas geradas pelo modelo estocástico multivariado é capturada pelas combinações dos “padrões” alto (A), médio (M) e baixo (B) nos eixos de agregação, resultando representantes de classes  $n$ -variadas  $(A, M, B)^n$  ou  $(A, B)^n$ , onde  $n$  é o número de eixos de agregação; e
- as probabilidades dos cenários resultam da solução do método de agregação utilizado (frequências relativas de ocorrência das realizações pertencentes às classes).

Uma alternativa à estrutura de 5184 ( $81 \times 16 \times 4$ ) cenários para um problema com quatro estágios (três estágios estocásticos), descrita anteriormente é considerar árvores de menor cardinalidade, agregando-se o SIN em dois subsistemas (Sul-Sudeste/Centro-Oeste e Norte-Nordeste) a partir do segundo estágio estocástico. Desta forma, se forem representados os estados de energia afluente A, M, B nos estágios 2 e 3 e apenas A, B no estágio 4, teremos  $3^2$  cenários a partir de cada nó do segundo estágio e  $2^2$  cenários a partir de cada nó do estágio 3. A estrutura ( $81 \times 9 \times 4$ ) resulta num total de  $(1 + 3^4 + 3^4 \times 3^2 + 3^4 \times 3^2 \times 2^2) = 2592$  nós.

Uma redução adicional pode ser alcançada ao se considerar apenas duas alternativas de energias afluentes a partir do segundo estágio,  $(81 \times 4 \times 4)$ , resultando em  $(1 + 3^4 + 3^4 \times 2^2 + 3^4 \times 2^2 \times 2^2) = 1702$  nós.

### 4.1.3 Processo de seleção de cenários

Para chegar a um compromisso entre a necessidade de parcimônia da amostra e uma representação adequada dos cenários, o modelo BONSAI propõe duas alternativas para a redução da cardinalidade da amostra de cenários. Ambas promovem uma redução da dimensão do vetor que representa uma observação na amostra. A primeira, (método de agregação) parte da agregação das energias naturais afluentes aos subsistemas, obtidas pela transformação das vazões. A segunda, (método das componentes principais), utiliza a técnica de análise de componentes principais para obter uma redução da dimensão diretamente no espaço de vazões.

O **método de agregação** consiste dos seguintes passos:

1. gerar de forma aleatória uma amostra multivariada suficientemente grande de vazões afluentes às usinas hidroelétricas. Esta amostra, por ser equiprovável, garante que a distribuição multivariada de vazões, resultante da condição inicial usada para o nó e estágio considerado, tenderá para a distribuição populacional subjacente ao modelo estocástico usado;
2. reduzir a dimensionalidade das observações da amostra, considerando a representação do parque gerador hidroelétrico em reservatório equivalente de energia, mantendo a estrutura de diversidade espacial entre os subsistemas por meio da agregação das energias naturais afluentes aos subsistemas, obtidas a partir das vazões geradas; e
3. reduzir o tamanho da amostra a uma cardinalidade pré-especificada, por meio de um método de agregação (dimensão menor favorece melhor performance, sem perda da dependência espacial entre sistemas). A partir da amostra iid de ENAs resultante das vazões geradas, empregar uma das seguintes técnicas de redução:

- análise de conglomerados usando o algoritmo de  $k$ -Means;
- aproximação ótima com relação a uma métrica de probabilidades – Redução recursiva; e
- reticulado (empírico).

O **método das componentes principais** é uma alternativa que prescinde da geração de uma amostra *iid* de tamanho elevado para posterior agregação porque utiliza uma discretização dos eixos (componentes principais) que geram um subespaço de dimensão reduzida do espaço das vazões.

Finalmente, o representante de cada cenário agregado é remapeado para o domínio das vazões constituindo-se, assim, em uma das realizações da amostra original. Sua probabilidade fica “inchada” de acordo com o número relativo de cenários que ele representa, de modo que a soma das probabilidades de todos os representantes é unitária. Os representantes compõem a amostra de sucessores do nó e estágio em questão (com vazões não equiprováveis), e pela aplicação sucessiva do procedimento para cada nó e estágio do período de estudo (exceto o estágio final) resulta a árvore BONSAI.

## 4.2 Técnicas de redução de cenários

Neste item estão descritas as técnicas de redução de cenários investigadas neste trabalho para uso no espaço das energias naturais afluentes: métodos de agregação baseados em análise de conglomerados utilizando o algoritmo  $k$ -Means; redução recursiva baseada em métrica de probabilidades; e uso de amostragem estratificada bem como o procedimento de redução de dimensionalidade do espaço de vazões utilizando a análise de componentes principais.

### 4.2.1 Agregação em energias naturais afluentes

As energias naturais afluentes constituem uma alternativa para reduzir a dimensão do espaço de estados que tem por base uma ponderação “natural”: as usinas de

maior afluência e potência têm maior contribuição no mapeamento em ENA de cada sistema.

As ENAs dos subsistemas apresentam dependência espacial, fruto das correlações cruzadas das vazões e têm ordens de grandeza que dependem do tamanho de cada subsistema. Para um melhor desempenho dos métodos que avaliam distâncias entre observações, recomenda-se que as medidas sejam independentes da escala de cada um dos eixos e da covariância entre eles. Desta forma, na aplicação dos métodos de seleção de representantes, as ENAs de cada subsistema são previamente padronizadas (média nula e desvio padrão unitário), de modo que a escala relativa dos valores das ENAs dos diferentes subsistemas não resulte em seleção tendenciosa para os subsistemas de maior magnitude, e tornadas espacialmente independentes entre si pela transformação linear dada pela multiplicação por uma matriz de carga, estimada a partir da matriz de covariância amostral das energias padronizadas afluentes aos subsistemas. Por meio desta transformação de Mahalanobis<sup>2</sup>, recai-se na distância euclidiana clássica (MAHALANOBIS, 1936).

A pequena dimensão do vetor de energias afluentes permite reduzir o número de combinações para os quais se deseja garantir ter representantes, além de reduzir o esforço computacional do método de agregação ou redução a ser aplicado a cada nó de cada estágio (exceto o estágio final, composto de nós folhas).

#### 4.2.1.1 *k*-Means

A análise de agrupamentos (conglomerados, clusters) visa organizar objetos em grupos de forma que exista similaridade (pequena dispersão) dentro de cada grupo e dissimilaridade entre os grupos. O método *k*-Means de agregação, a partir de um número desejado de classes, digamos *k*, atribui cada um dos *n* objetos do conjunto

---

<sup>2</sup>Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  variáveis aleatórias com mesma distribuição. A distância de Mahalanobis pode ser vista como uma generalização da distância Euclidiana que leva em conta a covariância  $\Sigma$  entre os dados. Sua definição é:

$$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

$N$  a uma das  $k$  classes  $S_j, j = 1, \dots, k$ , de forma a minimizar alguma medida de dispersão dentro de cada classe e maximizar a dispersão entre classes. As classes  $S_j$  são mutuamente exclusivas e sua união é o conjunto  $N$ . Uma medida muito comum de dispersão é a soma dos quadrados das distâncias euclidianas entre os objetos de cada classe e o centro de massa (centróide) desta classe.

Mais formalmente, este método particiona (agrega)  $N$  objetos em  $k$  subconjuntos disjuntos  $S_j$ , cada um contendo  $N_j$  objetos, de forma a minimizar o critério de soma dos quadrados das distâncias euclidianas ao centro de massa:

$$kM = \sum_{j=1}^k \sum_{n \in S_j} \|x_n - c_j\|^2,$$

onde  $x_n$  é um vetor que representa o  $n$ -ésimo objeto e  $c_j$  é o centróide dos objetos em  $S_j$ . Prova-se que a parcela do valor do critério referente a cada representante  $j$  pode ser calculada mais facilmente obtendo-se inicialmente o centróide de cada conjunto  $S_j$  e calculando-se o quadrado das distâncias do centróide de  $j$  aos seus representados. O problema de otimização quadrática mista resultante é NP-difícil, de modo que foram desenvolvidos métodos aproximados de solução.

O algoritmo  $k$ -Means (HARTIGAN; WONG, 1979) é um destes métodos para agregação que encontra um ótimo local desta medida de dispersão, usando como parâmetro de entrada  $k$ , o tamanho da sub-amostra resultante. Em geral, o algoritmo não atinge o mínimo global de  $kM$ , mas, apesar desta limitação, é largamente empregado como resultado da facilidade de sua implementação.

O algoritmo consiste em um procedimento de estimação recursiva. No primeiro passo, faz-se uma atribuição aleatória dos objetos em  $k$  classes e calcula-se o centróide  $c_k$  de cada classe (em geral, um algoritmo guloso simples é usado). Em seguida, cada componente  $x_n$  da população é examinado e atribuído a alguma das  $k$  classes definidas na partição anterior de forma a minimizar a distância. Isto conduz a uma nova partição na qual a soma das distâncias é estritamente menor. O centróide de cada classe é recalculado cada vez que um componente é adicionado à classe e o processo continua até que se alcance um critério de parada, normalmente os objetos não trocarem mais de classe.

O método é muito rápido. O algoritmo pode ser feito a partir de pontos

iniciais diferentes, gerados aleatoriamente, visando avaliar como varia o critério  $kM$  para cada inicialização, de modo a reduzir a chance de se adotar uma agregação pobre devida à inicialização da heurística. Alternativamente, pode-se utilizar como pontos iniciais aqueles fornecidos por um algoritmo hierárquico, p. ex., o método hierárquico proposto por (WARD, 1963) que utiliza um enfoque a partir da análise de variância para avaliar as distâncias entre classes. Este algoritmo inicia com uma classe para cada objeto e a cada iteração, agrupa duas classes para formar uma única, escolhendo aquelas que resultam no menor aumento da soma dos quadrados intra-classe. Este é o procedimento de inicialização adotado neste trabalho.

O algoritmo  $k$ -Means busca determinar os elementos representantes e os conjuntos correspondentes de modo a minimizar o critério dado pela soma dos quadrados das distâncias de cada representante aos seus representados. Quando as variáveis possuem escalas diferentes e são correlatadas, o uso da distância Euclideana para o critério  $kM$  não é o mais adequado, sendo recomendado o uso da distância de Mahalanobis, que leva em conta estes fatores. Desta forma, supondo que a distribuição das energias afluentes padronizadas e tornadas espacialmente independentes entre si antes de aplicar o processo de agregação seja espalhada e sem pontos isolados muito afastados dos demais, os agrupamentos obtidos com o algoritmo de solução  $k$ -Means adotado geralmente são “esféricos”, denotando a nuvem de elementos em torno de cada representante. Utilizando esta métrica pretende-se preservar além da média e do desvio padrão, a correlação espacial entre as variáveis de agregação.

O algoritmo  $k$ -Means é sensível à presença de elementos discrepantes (outliers) na amostra, que podem alterar substancialmente o valor do centróide. Desta forma, elementos isolados muito distantes de todos os outros, podem vir a constituir uma classe de apenas um elemento. Um procedimento de censura de valores discrepantes, como o descrito no Apêndice A, pode ser utilizado para evitar este problema, às custas de alguma distorção na amostra.

A implementação deste algoritmo no modelo BONSAI não impõe que exista pelo menos um representante para cada combinação possível dos padrões  $(A, M, B)$ : espera-se que no processo de definição da amostra reduzida este pressuposto seja atendido. Entretanto isto nem sempre ocorre, como se verá adiante.

Em síntese, a implementação deste processo de escolha pode ser sumariada como:

1. ajustar o modelo univariado para cada posto;
2. estimar a matriz de correlação espacial  $\Sigma$  a partir do ruído histórico  $v_\tau$  e obter a matriz de carga  $C$  tal que  $CC^\top = \Sigma$ ;
3. gerar um número suficientemente elevado de vetores de vazões multivariadas afluentes às usinas;
4. transformar as vazões em energias afluentes aos sistemas (redução da dimensionalidade, mantendo estrutura de diversidade espacial entre sistemas);
5. padronizar as ENAs e aplicar a transformação de Mahalanobis, de forma a tornar os eixos independentes da escala e não correlatados;
6. aplicar o algoritmo  $k$ -Means para agregar as ENAs e determinar os representantes;
7. atribuir a probabilidade de cada representante como a soma das probabilidades dos seus representados (cenários representantes não são equiprováveis); e
8. definir os sucessores de cada nó como as vazões afluentes aos postos correspondentes aos representantes obtidos na agregação.

#### 4.2.1.2 Redução recursiva

Neste item o problema de programação estocástica será denotado por

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbb{E}_P[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})]$$

onde  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o espaço de decisões,  $P$  é uma distribuição de probabilidades (medida) no espaço amostral  $\Omega \in \mathbb{R}^s$ ,  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  é a função objetivo do vetor de decisões  $\mathbf{x} \in X$  e da variável aleatória  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  e  $\mathbb{E}_P$  denota o valor esperado com relação à  $P$ . Esta formulação abrange os problemas estocásticos com recurso com dois estágios ou multi-estágios.

A técnica de redução de cenários, desenvolvida por (DUPAČOVÁ; GRÖWEKUSKA; RÖMISCH, 2003) e aperfeiçoada por (HEITSCH; RÖMISCH, 2003), busca



uma aproximação ótima para uma nova árvore de cenários com distribuição de probabilidades  $Q$ , de menor cardinalidade do que a árvore original, baseada em *métrica de probabilidades*<sup>3</sup>. Esta métrica de probabilidades, selecionada da família de métricas de transporte de Monge-Kantorovich, é tal que os valores ótimos e os conjuntos de solução do problema de otimização se comportam de forma estável com respeito a perturbações na distribuição de probabilidades subjacente, medida em termos da métrica especificada. A árvore reduzida resultante é constituída por um subconjunto dos cenários originais. Este método pode ser interpretado como uma forma de poda da árvore original, seguida de uma re-padronização da distribuição de probabilidades dos cenários da árvore remanescente.

### Justificativa matemática

(RÖMISCH, 2003) apresenta um levantamento dos resultados quantitativos de estabilidade para problemas de programação estocástica, a partir do qual sugere que as distâncias entre distribuições de probabilidades dadas pelo problema de transporte de massa de Monge-Kantorovich constituem uma alternativa para construir aproximações para a distribuição de probabilidades  $P$  que sejam próximas a  $P$  com respeito a esta métrica. A seguir apresenta-se um resumo dos resultados que justificam o método de redução recursiva, restritos ao caso em que as distribuições de probabilidades  $P$  e  $Q$  são discretas, i.e., os correspondentes espaços amostrais  $\Omega_P, \Omega_Q \subset \mathbb{R}^s$  possuem um número finito de eventos, com cardinalidade, respectivamente  $N$  e  $M$ . Uma dedução detalhada das afirmações que se seguem encontra-se em (OLIVEIRA, 2007).

Dadas  $p_i = P(\omega_i)$ ,  $q_j = Q(\omega_j)$ , probabilidades de ocorrência dos eventos  $\omega_i$  e  $\omega_j$ , e uma função de custos não-negativa

$$c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j) = \|\omega_i - \tilde{\omega}_j\| \times \max \{1, \|\omega_i - \omega_0\|^{r-1}, \|\tilde{\omega}_j - \omega_0\|^{r-1}\},$$

com  $\omega_0 \in \mathbb{R}^s$  algum elemento fixo e  $\|\cdot\|$  alguma norma em  $\mathbb{R}^n$ , o funcional de Monge-Kantorovich  $\mu_r(P, Q)$ ,  $r \geq 1$  é definido por (RACHEV; RÜSCHENDORF,

---

<sup>3</sup>Métrica de probabilidades é uma função definida com o objetivo de medir a distância entre duas distribuições de probabilidades. Deve, portanto, atender aos requisitos de uma função distância (se  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função distância, tem-se  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) \geq 0$  se  $x \neq y$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  e  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in X$ )

1998):

$$\mu_r(P, Q) = \min_{\eta} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j) \eta_{i,j} \right\} \quad (4.2)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^N \eta_{i,j} = q_j, \quad \forall j = 1, \dots, M$$

$$\sum_{j=1}^M \eta_{i,j} = p_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\eta_{i,j} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

Este funcional representa os valores ótimos de problemas lineares de transporte de massa, que é um problema de fluxos em grafo bipartido com  $N$  nós fonte e  $M$  nós destino,  $\{p_i\}$  ofertas,  $\{q_j\}$  demandas, “custos”  $\{c_r(\omega, \tilde{\omega})\}$ , expresso em termos da variável primal  $\eta$ .

O dual deste problema é:

$$\zeta(P, Q) = \max_{u,v} \left\{ \sum_{i=1}^N p_i u_i + \sum_{j=1}^M q_j v_j \right\} \quad (4.3)$$

sujeito a

$$u_i + v_j \leq c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j), \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

Considerando  $\Omega_P = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  e  $\Omega_Q = \{\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_M\} = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_M}\} \subset \Omega_P$ , prova-se que  $u_i^* = -v_{j_k}^*$  se  $i = j_k$  para o par ótimo  $(u^*, v^*)$ . Definindo  $q_i = 0, \forall \omega_i \in \Omega_P \setminus \Omega_Q$  segue:

$$\zeta(P, Q) = \max_u \left\{ \sum_{i=1}^N u_i (p_i - q_j) \right\}$$

sujeito a

$$|u_i - u_j| \leq c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall j = 1, \dots, M$$

e, portanto, o problema dual de (4.2) fica

$$\zeta(P, Q) = \max_u \left\{ \left| \mathbb{E}_P[u(\omega_i)] - \mathbb{E}_Q[u(\tilde{\omega}_j)] \right| \right\} \quad (4.4)$$

sujeito a

$$|u(\omega_i) - u(\tilde{\omega}_j)| \leq c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j), \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

A expressão (4.4) acima é exatamente a métrica de distância de probabilidades de Fortet-Mourier para o caso discreto. Portanto, resolver o problema de transporte de massa de Monge-Kantorovich equivale a medir a distância entre a distribuição de probabilidades da árvore original  $P$  e a distribuição  $Q$  da árvore reduzida segundo esta métrica de probabilidades e a justificativa de seu uso para selecionar a árvore reduzida  $Q$  é preservar a proximidade entre os valores ótimos de  $\mathbb{E}_P[f(x^*, \omega)]$  e  $\mathbb{E}_Q[f(\tilde{x}, \tilde{\omega})]$  para  $\tilde{x}$  próximo à  $x^*$ . Observe que, no caso em que  $\mathbb{R}^s$  é um espaço euclidiano e  $r = 1$ , a função custo  $c_r$  coincide com a métrica induzida pela norma de  $\mathbb{R}^s$ .

O problema primal (4.2) ou seu dual (4.3) podem ser resolvidos facilmente por programação linear, em particular, por um algoritmo de fluxos em redes. Os dados são  $P$ ,  $Q$  e a matriz de distâncias  $D$ .

### Redução ótima

O problema de redução de cenários a ser resolvido consiste em escolher quais  $(N - M)$  cenários excluir de  $P$  de modo a minimizar  $\zeta(P, Q)$ , determinando as probabilidades dos  $M$  cenários remanescentes. Em outras palavras, a minimização de  $\zeta(P, Q)$  sobre todos os possíveis subconjuntos  $Q$  define o problema de redução recursiva.

Uma vez fixado o conjunto  $J \subset \{1, \dots, N\}$  de índices dos cenários eliminados, (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003) prova que a mínima distância de  $P$  ao conjunto de cenários  $Q$  com cenários  $\{\omega_j\}_{j \notin J}$  pode ser calculada explicitamente. A distância mínima é dada por:

$$\mu_r(P, Q) = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} \{c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j)\},$$

onde a probabilidade  $q_j$  dos cenários preservados  $\tilde{\omega}_j$ ,  $j \notin J$  de  $Q$  é o resultado da redistribuição ótima:

$$q_j = p_j + \sum_{i \in J(j)} p_i, j \notin J,$$

com o conjunto de índices  $J(j)$  definido por  $\{i \in J : j = j(i)\}$  e  $j(i)$  é a seleção do conjunto de índices dos cenários mais próximos a  $\tilde{\omega}$ ,

$$j(i) \in \operatorname{argmin}_{j \notin J} c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j), \forall i \in J. \quad (4.5)$$

A interpretação da regra de redistribuição ótima (4.5) é que a nova probabilidade de um cenário preservado é igual à probabilidade que já possuía somada com as probabilidades dos cenários descartados mais próximos a ele com respeito à  $c_r$ . Naturalmente, todos os cenários removidos têm probabilidade zero.

A escolha ótima do conjunto de índices  $J$  para redução de cenários com cardinalidade  $|J|$  é dada pela solução do problema de redução ótima:

$$\min \left\{ \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} \{c_r(\omega_i, \tilde{\omega}_j) : J \subset \{1, \dots, N\}, |J| = N - M\} \right\}. \quad (4.6)$$

Este problema clássico de otimização combinatória (problema de recobrimento) é NP-completo e, dependendo do número de cenários (cardinalidade de  $P$ ), pode ser inviável de ser resolvido computacionalmente. Para determinar o conjunto de índices  $J$  em tempo razoável, (GRÖWE-KUSKA; HEITSCH; RÖMISCH, 2003) e (HEITSCH; RÖMISCH, 2003) desenvolveram algoritmos heurísticos eficientes, baseados em um procedimento recursivo. Estes algoritmos, parametrizados pelo valor arbitrado para a cardinalidade  $M$  da árvore reduzida, exploram a estrutura do problema e não realizam uma análise exaustiva de todas as combinações de cenários possíveis. Para os casos particulares de remover apenas um cenário ou manter apenas um cenário a solução de (4.6) é analítica. Para o caso em que o total de cenários a serem removidos é pequeno, a aplicação recursiva do procedimento de remoção de apenas um cenário dá origem ao algoritmo de redução regressiva. Por outro lado, caso o número de cenários a serem preservados seja pequeno, o processo de seleção de um único cenário pode ser aplicado recursivamente, resultando no chamado algoritmo de seleção progressiva.

O algoritmo heurístico seleção progressiva rápida (Fast-Forward Selection), implementado no modelo BONSAI, está delineado abaixo. Neste algoritmo, inicialmente todos os cenários são descartados e a cada iteração escolhe-se um cenário a ser preservado.

**passo 1** inicializar – primeiro cenário a excluir

faça  $d_{k,j}^1 = c_r(\omega_k, \omega_j), \forall k, j = 1, \dots, N$

calcule  $z_j^1 = \sum_{k \neq j} p_k d_{k,j}^1, \forall j = 1, \dots, N$

escolha  $j_1 \in \operatorname{argmin}_{j \in \{1, \dots, N\}} z_j^1$   
 faça  $J^{[1]} := \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1\}$

**passo i** para  $i = 2, \dots, N - M$ , determinar o conjunto  $J = \{J(i), i = 1, N - M\}$  de cenários a excluir

calcule  $d_{k,j}^i = \min\{d_{k,j}^{i-1}, d_{k,j_{i-1}}^{i-1}\}, \forall k, j \in J^{[i-1]}$

calcule  $z_j^i = \sum_{k \in J^{[i-1]} \setminus \{j\}} p_k d_{k,j}^i, \forall j = 1, \dots, N$

escolha  $j_i \in \operatorname{argmin}_{j \in J^{[i-1]}} z_j^i$

faça  $J^{[i]} = J^{[i-1]} \setminus \{j_i\}$

**passo final** determinar probabilidades de cenários remanescentes  $j \notin J$ :

faça  $q_j = p_j + \sum_{i \in J | j(i)=j} p_i, j \in J$ , onde  $j(i) = \operatorname{argmin}_{j \notin J} d_{i,j}, i \in J$ .

A árvore resultante da redução é obtida eliminando-se os cenários da árvore original, e substituindo as probabilidades dos cenários remanescentes por aquelas resultantes do algoritmo de redução. A redistribuição ótima de probabilidades para os cenários preservados é tal que sua probabilidade resulta igual à soma da probabilidade que possuía com aquelas dos cenários próximos que foram descartados.

O cálculo da matriz  $D$  pode ser efetuado de forma incremental ao longo dos estágios: a cada bifurcação de um nó em um dos estágios, a contribuição para a distância total entre dois cenários sucessores do nó é a distância euclideana entre as vazões correspondentes no estágio seguinte. A distância total entre dois cenários quaisquer é a soma das distâncias euclidianas correspondentes ao longo dos estágios, partindo do primeiro estágio em que a bifurcação entre os cenários ocorre. Cabe notar que em nenhum momento é necessário calcular o valor de  $\zeta(P, Q)$ . No final, escolhe-se, dentre as sub-árvores obtidas para vários valores de  $M$ , aquela que apresente o melhor compromisso entre a distorção na degradação da aproximação e a dimensão  $M$ .

Os algoritmos redução regressiva simultânea (Simultaneous Backward Reduction), seleção progressiva rápida (Fast Forward Selection) e método rápido regres-

sivo (Fast Backward Method), propostos por (GRÖWE-KUSKA; HEITSCH; RÖMISCH, 2003), estão implementados e disponíveis na biblioteca GAMS/SCENRED, introduzida nas distribuições de GAMS (General Algebraic Modeling System)<sup>4</sup> a partir da versão 20.6 de maio de 2002. Estes algoritmos, considerando os cenários originais e os parâmetros para controlar a redução fornecidos pelo usuário, retornam o conjunto de cenários reduzido. No modelo BONSAI foi implementado o algoritmo de seleção progressiva rápida. Com o objetivo de se testar os outros algoritmos disponíveis, esta biblioteca foi utilizada. Os resultados obtidos foram equivalentes, como será mostrado no Capítulo 5.

Em síntese, a implementação do método de redução recursiva consiste em:

1. ajustar o modelo univariado para cada posto;
2. estimar a matriz de correlação espacial  $\Sigma$  a partir do ruído histórico  $v_\tau$  e obter a matriz de carga  $C$  tal que  $CC^\top = \Sigma$ ;
3. gerar um número suficientemente elevado de vetores de vazões multivariadas afluentes às usinas;
4. transformar as vazões em energias afluentes aos sistemas (redução da dimensionalidade, mantendo estrutura de diversidade espacial entre sistemas);
5. padronizar as ENAs e aplicar a transformação de Mahalanobis, de forma a tornar os eixos independentes da escala e não correlatados;
6. aplicar o algoritmo de seleção progressiva rápida para determinar os representantes;
7. atribuir a probabilidade de cada representante como a soma das probabilidades dos seus representados (cenários representantes não são equi-prováveis); e
8. definir os sucessores de cada nó como as vazões afluentes aos postos correspondentes aos representantes obtidos na agregação.

---

<sup>4</sup>GAMS, (BROOKE et al., 1998), é uma linguagem de alto nível especificamente projetada para modelar problemas de programação linear, inteira, mista e não linear, complexos e de grande porte. Maiores informações podem ser encontradas em [www.gams.com](http://www.gams.com).

Cabe observar que (OLIVEIRA, 2007) aplica o método de redução recursiva diretamente às vazões multivariadas, enquanto que a proposta deste trabalho é, inicialmente, reduzir a dimensão do espaço amostral de forma a se ter o processo aplicado às ENAs padronizadas e aplicar o processo de redução recursiva neste espaço de dimensão reduzida.

#### 4.2.1.3 Reticulado

O método reticulado para redução da cardinalidade utiliza uma estratégia de amostragem estratificada que consiste em subdividir cada um dos eixos de agregação em classes e impor a existência de pelo menos um cenário representante em cada um dos correspondentes estratos.

Uma abordagem padrão para aproximar uma distribuição multivariada (contínua) por meio de valores discretos consiste em discretizar cada variável individualmente; construir o reticulado correspondente; escolher um representante para cada uma das células em que foi estratificado o espaço de estados (normalmente aquele mais próximo do centro de gravidade de cada célula), e atribuir uma probabilidade para cada representante.

Assim, se o espaço de estados das aflúências for mapeado no espaço de energias naturais afluentes a cada um dos quatro subsistemas usualmente considerados no caso do SIN e cada um dos eixos for dividido em 3 classes, correspondendo a uma representação de energias afluentes baixas, médias e altas, tem-se uma subdivisão do espaço amostral em 81 células. Os cenários selecionados por este método atendem a concepção do modelo BONSAI de ter um representante associado a cada combinação dos padrões A, M, B. Adicionalmente, garante-se o propósito de estabelecer uma distribuição representativa das diversas situações e também de evitar que o modelo de otimização realize análises com cenários extremos.

Uma questão que se coloca é como definir os limites para cada um dos padrões A, M, B. Como mencionado anteriormente, o uso de um critério global como o utilizado pelo método  $k$ -Means — minimizar a soma das distâncias euclidianas dos representados ao CG de cada classe em todas as classes consideradas — pode resultar em selecionar um elemento extremo como representante.

Isto sugere o uso de intervalos baseados nos quantis de cada variável para classificar as ocorrências. Nesta tese propõe-se que estes quantis sejam estimados a partir da distribuição empírica das energias naturais afluentes padronizadas, obtida por meio de uma geração aleatória de tamanho suficientemente grande. Este enfoque, à semelhança do uso de estatísticas de ordem, é menos afetado pela ocorrência de eventos extremos, tornando-o atraente para escolha de cenários representantes para uso em modelos de planejamento da operação de médio prazo. Os estudos realizados indicam que para amostras de tamanho superior a 2000 todas as classes possuíam representantes. Como medida de segurança, recomenda-se utilizar amostras de tamanho mínimo 3000 durante o processo de geração de representantes.

O processo de escolha de representantes pelo método reticulado, considerando uma estratificação em três classes  $A, M, B$ , pode ser assim resumido:

1. ajustar o modelo univariado para cada posto;
2. estimar a matriz de correlação espacial  $\Sigma$  a partir do ruído histórico  $v_\tau$  e obter a matriz de carga  $C$  tal que  $CC^\top = \Sigma$ ;
3. gerar um número suficientemente elevado de vetores de vazões multivariadas afluentes às usinas;
4. transformar as vazões em energias afluentes aos sistemas (redução da dimensionalidade, mantendo estrutura de diversidade espacial entre sistemas);
5. padronizar as ENAs e aplicar a transformação de Mahalanobis, de forma a tornar os eixos independentes da escala e não correlatados;
6. dividir cada eixo (energia natural afluyente a cada subsistema) em três intervalos, correspondentes aos eventos  $A, M, B$ ;
7. definir como representante o centróide de cada classe multivariada correspondente à combinação dos eventos; e
8. atribuir a probabilidade de cada representante, correspondente ao total de pontos na classe.



O método reticulado, de amostragem estratificada, tem como vantagem principal atender o princípio norteador adotado na proposta do modelo BONSAI para a definição de estrutura: todas as classes estão representadas pelos cenários selecionados. Por outro lado, caso o número de subsistemas necessários para representar de forma adequada o SIN cresça, este método passa a apresentar um número de representantes elevado: por exemplo, caso sejam considerados 6 subsistemas, o total de cenários para três alternativas de energias afluentes passa a  $3^6 = 729$ .

## 4.2.2 Discretização usando componentes principais

A análise de componentes principais tem por objetivo transformar as variáveis observadas em um novo conjunto de variáveis que não se correlacionam e que sejam arranjadas em ordem decrescente de importância. O principal objetivo do método é reduzir a dimensionalidade do espaço e encontrar novas variáveis que o tornem mais fácil de ser analisado. Esta técnica identifica as direções ortogonais de máxima variância nos dados originais e projeta os dados num espaço de dimensão menor formado por um subconjunto dos componentes de maior variância (os componentes ortogonais, ou componentes principais) ordenados de forma que aqueles com a variação maior aparecem primeiro (BISHOP; FIENBERG; HOLLAND, 2007). A análise de componentes principais pode ser utilizada para reduzir a dimensionalidade do espaço dos dados ao manter aqueles componentes principais que mais contribuem para a sua variância, explicando a maior parte de suas características, e eliminar aqueles componentes principais que contribuem menos com a variação dos dados.

A idéia básica do método proposto em (PSR, 2004a) e (PSR, 2004b) para produção de cenários consiste em reduzir a dimensão do vetor de ruídos relativos ao modelo estocástico de vazões utilizando-se da técnica de componentes principais, paralelamente a um processo determinístico de construção de cenários, por meio da discretização dos ruídos relativos às componentes principais de maior contribuição para a variância dos dados originais. Naturalmente, deseja-se também que a discretização resultante respeite as propriedades estatísticas relevantes da distribuição multivariada das vazões, em particular as médias e covariâncias condicionadas.

Como visto no item 4.1.1, o vetor  $v$  de ruídos da série transformada de vazões

incrementais é normal multivariado. A sua matriz de correlações cruzadas  $\Sigma$  pode ser usada para incorporar no modelo estocástico de cada usina as dependências espaciais entre as vazões afluentes. A decomposição espectral de  $\Sigma = P\Lambda P^T$  é tal que as colunas da matriz ortogonal  $P$  são os autovetores de  $\Sigma$ , e os elementos (não nulos) da matriz diagonal  $\Lambda$  são os correspondentes autovalores. Chamamos  $C = P\sqrt{\Lambda}$  de matriz de carga, de modo que  $CC^T = \Sigma$ . A decomposição espectral é tal que a variância explicada pelos  $p$  maiores autovalores é proporcional à sua soma. No caso em que  $p = n$ , a decomposição é perfeita, i.e., a variância explicada é 100%. Para valores  $p < n$  há uma perda da representação, mas em geral a aproximação ainda é grande mesmo para  $p \ll n$ . Tomando-se a matriz diagonal  $\Lambda'$  composta pelos  $p$  maiores autovalores e a matriz  $P'$ , composta pelos autovetores correspondentes, resulta a matriz de carga  $C' = P'\Lambda'^{1/2}$  de dimensão  $n \times p$  tal que  $\Sigma' = P'\Lambda'^{1/2}\Lambda'^{1/2}P'^T$  seja similar a  $\Sigma$ .

A decomposição em  $p$  componentes principais é usada para que, ao invés de produzir o ruído com a mesma dimensão do vetor de vazões, este seja obtido como  $v = C'g$ , onde  $g \sim N(0, I)$  é um ruído branco gaussiano com dimensão  $p \ll n$ .

Como cada elemento da diagonal de  $\Sigma$  é unitário, a soma dos quadrados dos elementos de cada linha da matriz de carga também é um. Entretanto, ao se descartar qualquer autovalor na decomposição, isto não mais se verifica. Deste modo aplica-se uma re-normalização de cada linha da matriz de carga  $C'$  calculando-se a soma dos quadrados de cada linha após a decomposição e dividindo-se cada elemento da linha pela raiz quadrada deste valor. A matriz de carga final  $C''$  resultante é tal que a matriz de correlação  $\Sigma''$  voltará a ter diagonal unitária, conforme desejado. De uma maneira geral, esta re-normalização quase não afeta a estrutura de dependência espacial que se deseja preservar, sendo vantajosa visto que assume-se que cada ruído tem média nula e variância unitária.

Após reduzir a dimensão do espaço de estados dos ruídos a  $p$  componentes principais, discretiza-se cada componente  $j$ ,  $j = 1, \dots, p$  em  $m_j$  intervalos. As  $\prod_{j=1}^p m_j$  células definem a distribuição discreta do vetor de ruídos. Ao invés de gerar os cenários via amostragem aleatória, seleciona-se o ruído  $g$  como um vetor de coordenadas em cada uma destas células no espaço dos  $p$  ruídos independentes. Isto

resulta em um número limitado de cenários multivariados no qual cada realização representa uma das células do reticulado, viabilizando assim a solução do modelo de otimização estocástica.

O processo de geração de cenários pode ser resumido nos seguintes passos:

1. estimar a matriz de correlação espacial  $\Sigma$  a partir do ruído histórico  $v$  e
  - (a) obter a matriz de carga  $C$  tal que  $CC^T = \Sigma$ ;
  - (b) reduzir a dimensão usando  $p \ll n$  componentes principais, definindo  $C'_{n \times p}$  tal que  $C'C'^T = \Sigma'$ ;
  - (c) re-normalizar a matriz de carga  $C'$ , definindo  $C''$  de forma que  $C''C''^T = \Sigma''$  tenha diagonal unitária;
2. escolher o ruído multivariado  $g \sim N(0, I)$ , iid, de dimensão  $p \ll n$ ;
3. aplicar a matriz de carga  $C''$  e obter  $v_\tau = C''g$ , ruído espacialmente correlacionado;
4. aplicar o modelo PAR(1), equação (4.1) para cada posto principal  $i$  e obter  $x_{t,\tau}^j$ , variável aleatória normal com média zero, variância unitária e autocorrelação serial  $\rho_\tau^j$ ;
5. calcular  $y_{t,\tau}^j = \mu_\tau^j + \sigma_\tau^j \times x_{t,\tau}^j$ ; e
6. calcular a sua vazão incremental  $q_{t,\tau}^j = \exp(y_{t,\tau}^j)$

Para o primeiro estágio estocástico, discretiza-se a distribuição normal padrão relativa a cada componente em três pontos, sendo que estes pontos e suas probabilidades são definidos de modo que a distribuição seja simétrica, de média nula e variância unitária, onde se arbitra a probabilidade  $\vartheta$  do ponto central. Por simetria, decorre que este ponto é nulo, e também que os pontos extremos são da forma  $-\alpha$  e  $\alpha$ , com a mesma probabilidade  $\theta$ . Para que a média seja nula esta probabilidade requer-se  $\theta = \frac{1-\vartheta}{2}$ . Finalmente, para que a variância seja unitária, é necessário que  $2\theta\alpha^2 = 1$ . Cabe observar que a escolha da probabilidade  $\vartheta$  do ponto central deve ser feita de modo criterioso, pois caso seja atribuído um valor muito elevado para a sua

ocorrência, os pontos  $\pm\alpha$  passam a representar valores extremos da distribuição, o que não é conveniente neste tipo de estudo.

Para o segundo estágio, discretiza-se a normal padrão relativa a cada componente em dois pontos simétricos da forma  $-\alpha$  e  $\alpha$ , com as mesmas propriedades dos momentos média e variância, resultando que  $|\alpha| = 1$ , ambos pontos com a mesma probabilidade 0,50. Esta discretização corresponderia a valores alto e baixo, sendo adotada de modo que o número de cenários da árvore resultante não seja excessivo. Esta mesma discretização pode ser feita para os demais estágios ou então adotar-se a partir de um determinado estágio apenas um único sucessor para cada nó (esquema “pente”).

Esta abordagem caracteriza-se por dispensar a amostragem aleatória do espaço de estados, usada pelos métodos de agregação e redução. O processo de geração de cenários é portanto determinístico, dependendo entretanto da condição inicial, que é distinta para cada nó da árvore. Como foi visto anteriormente, os parâmetros média e desvio padrão da distribuição log-normal multivariada condicionada ao um valor inicial  $x_0$  são, respectivamente,  $\vec{\mu}_{x_0}$  e  $(D_\sigma D_\rho \Sigma'')$ . Outra característica desta abordagem é que nenhum cenário apresenta vazões extremas devidas a ruídos discrepantes que podem ser eventualmente gerados no processo de amostragem iid, visto que com a discretização do ruído relativo a cada componente principal, toda a densidade de probabilidade abaixo e acima de um desvio padrão foi mapeada nos pontos  $-\alpha$  e  $\alpha$ , respectivamente.

O método ACP tem como vantagem adicional prescindir de agregação em componentes de ENA, bastando que se estabeleça o total de componentes principais a serem consideradas. Isto pode ser interessante, na medida em que o ingresso de novas usinas hidroelétricas no parque gerador conduza à necessidade de se considerar um número maior de subsistemas equivalentes. A principal desvantagem deste método é a relativa rigidez dos cenários gerados.

## 4.3 Avaliação de métodos de geração de cenários

Exceto para casos triviais, não é possível resolver o problema (3.2) de forma exata considerando distribuições contínuas. Adicionalmente, em geral não se tem conhecimento perfeito da distribuição de probabilidades subjacente  $P$  e se adota uma aproximação  $\hat{P}$  para representar as incertezas. Desta forma, na maioria das aplicações, aproxima-se a distribuição  $P$  do processo estocástico por uma distribuição discreta com um número de realizações limitado pela disponibilidade de processamento computacional e pela complexidade do modelo de decisão. Assim, resolve-se apenas uma *aproximação* do “verdadeiro” problema de programação estocástica; e a qualidade de solução obtida está diretamente vinculada à qualidade da árvore de cenários considerada.

Uma das questões que se coloca quando se resolve um problema aproximado de programação estocástica é saber se a solução encontrada é adequada. Por adequada entende-se, neste contexto, uma solução não viesada em relação à “verdadeira solução” e cujo valor ótimo esteja próximo à solução verdadeira do problema. As possibilidades de tirar conclusões acerca das soluções ótimas e dos valores ótimos do problema estocástico verdadeiro usando resultados de problemas estocásticos baseados em cenários aproximados dependem essencialmente da estrutura do problema a ser resolvido e da origem dos cenários. De modo geral, os resultados não podem ser mais precisos do que os dados de entrada e é mais fácil avaliar questões referentes à precisão dos valores ótimos do que àquelas referentes aos conjuntos de soluções ótimas. Ao mesmo tempo, as soluções ótimas do problema estocástico aproximado não devem ser utilizadas no lugar da desejada solução do problema “verdadeiro” sem análises adicionais, que devem levar em conta a natureza do problema e a fonte, características e precisão dos dados, (DUPAČOVÁ, 1995). Ressalte-se que o interesse principal são as decisões de primeiro estágio.

### 4.3.1 Medida de qualidade da árvore de cenários

A qualidade da árvore de cenários deve ser medida por meio da estabilidade no valor da função objetivo, e não pela estabilidade nas variáveis de decisão. O

fundamento desta afirmação é que, em geral, a função objetivo de um problema de programação estocástico é plana (“flat”) com respeito a variações nas decisões, i.e., muitas estruturas de decisão são aproximadamente igualmente adequadas ou boas, não se alcança estabilidade no vetor de solução apesar de termos estabilidade no valor da função objetivo. Este fato não se constitui necessariamente em um problema, mas pode ser uma característica desejável de um problema de decisão, pois fazendo uso de um sistema adequado de suporte a decisão, é possível escolher entre estas diversas soluções levando em conta outros aspectos não representados no modelo de otimização, (HØYLAND; WALLACE, 2001).

A função objetivo de um problema de programação estocástica é:

$$z^* = \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_P[f(x, \xi)]$$

cujas solução é

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} F(x) \quad \text{e} \quad z^* = F(x^*)$$

onde  $\xi$  é o verdadeiro processo estocástico. Aproximando  $\xi$  por uma distribuição discreta  $\hat{\xi}$ , a função objetivo fica (a notação  $\hat{\cdot}$  está sendo utilizada para caracterizar o problema aproximado):

$$\hat{z}^* = \min_{x \in \mathcal{X}} \hat{F}(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_P[f(x, \hat{\xi})],$$

cujas solução é:

$$\hat{x}^* \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \hat{F}(x) \quad \text{e} \quad \hat{z}^* = \hat{F}(\hat{x}^*).$$

O erro incorrido devido à aproximar o vetor aleatório  $\xi$ , com distribuição  $P$ , pela discretização  $\hat{\xi}$ , com distribuição aproximada  $\hat{P}$ , é dado pela diferença entre o valor da função objetivo verdadeira  $F$  avaliada nas soluções do problema verdadeiro  $x^*$  e aproximado  $\hat{x}^*$  (KAUT; WALLACE, 2003):

$$\begin{aligned} e_f(\xi, \hat{\xi}) &= F\left(\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \hat{F}(x)\right) - F\left(\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} F(x)\right) \\ &= F\left(\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \hat{F}(x)\right) - \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) = F(\hat{x}^*) - z^*. \end{aligned}$$

### 4.3.2 Testando métodos de geração

Há pelo menos dois requisitos que qualquer método de geração de cenários deve atender. O primeiro consiste em assegurar algum grau de estabilidade para a so-

lução. Entende-se por soluções estáveis aquelas onde pequenas perturbações nos dados de entrada, i.e., na escolha dos cenários e de suas probabilidades, causam pequenas mudanças no *valor ótimo* e na *solução* do problema e perturbações maiores não causam uma catástrofe (DUPAČOVÁ, 1996). Em outras palavras, caso sejam geradas diversas árvores a partir dos mesmos dados (variando-se a semente do gerador de números pseudo-aleatórios) os valores ótimos e as soluções do problema de otimização devem estar próximos.

Adicionalmente, é desejável que a solução do problema (valor ótimo e vetor ótimo), obtida por meio de uma amostra do conjunto de cenários possíveis, esteja próxima da solução do “verdadeiro” problema, i.e., daquela que seria obtida caso fosse possível considerar um número infinito de cenários.

Ao comparar diferentes métodos de geração de cenários, o foco está no seu desempenho prático: de nada adianta um método de geração que garanta uma aproximação perfeita aos dados quando o número de cenários tende ao infinito mas que tem desempenho ruim para poucos cenários.

Idealmente, gostaríamos de estimar  $e_f(\xi, \hat{\xi})$  e testar se a solução baseada em cenários não é significativamente sub-ótima, i.e.,  $e_f(\xi, \hat{\xi}) \approx 0$ . Testar esta propriedade, nos casos práticos, é impossível pois, para tal, é necessário resolver o problema com o verdadeiro vetor aleatório  $\xi$ . Se isso fosse possível, não seria necessário recorrer à representação aproximada (!).

Entretanto, é possível realizar testes aproximados considerando uma *árvore de referência*  $\tilde{\xi}$  com distribuição  $\tilde{P}$ , de tamanho suficientemente grande, fornecida “exogenamente” com o intuito de estabelecer um valor  $\tilde{z}^* = \min_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}[f(x, \tilde{\xi})]$  que sirva de referência para avaliar os cenários  $\hat{\xi}$ .

Esta referência pode ser ainda refinada resolvendo o problema aproximado considerando diversas amostras da árvore de referência  $\tilde{\xi}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  e adotar o valor médio das soluções  $\tilde{z}^*$  obtidas como referência. Neste caso, o Teorema Central do Limite (JAMES, 2004) pode ser usado para estimar intervalos de confiança para esta referência. Esta é a abordagem utilizada nesta tese.

### 4.3.3 Aspectos computacionais

Para avaliar a metodologia proposta foram desenvolvidos programas computacionais para geração dos cenários e para resolução do problema de otimização do planejamento da operação.

A metodologia de geração e redução de cenários foi totalmente programada em FORTRAN. Com o objetivo de testar outros algoritmos da técnica de redução de cenários, não implementados na versão programada em FORTRAN, foi desenvolvida uma interface entre o programa BONSAI e a biblioteca SCENRED, disponibilizada nas distribuições de GAMS (General Algebraic Modeling System) a partir da versão 20.6 de maio de 2002 (BROOKE et al., 1998).

Foram implementados dois protótipos para o modelo de otimização do problema de planejamento da operação de médio prazo de sistemas hidrotérmicos interligados. O primeiro utiliza as linguagens FORTRAN e C++, e faz uso dos pacotes de software aberto GLPK (MAKHORIN, 2007), e COIN-OR (LOUGEE-HEIMER, 2003), para resolver os problemas de programação linear. A segunda implementação utiliza a linguagem de programação matemática AMPL, (A Modeling Language for Mathematical Programming) (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2002), e utiliza o pacote GLPK. Com o objetivo de verificar a sua performance computacional em termos dos softwares comerciais, foi também utilizado pacote XPRESS-MP (DASH-OPTIMIZATION, 2003).



# Capítulo 5

## Análise da estrutura proposta

### 5.1 Tamanho da amostra reduzida

O objetivo desta seção é avaliar qual é o tamanho da amostra reduzida que seja suficiente para produzir resultados estáveis e com pequena degradação com relação aos valores de referência. Estes estudos foram reportados no artigo (OLIVEIRA; COSTA, 2002). Para tanto, foi utilizada uma configuração do SIN tendo por base o PMO de janeiro de 2002, composta por 86 usinas hidroelétricas e 28 usinas térmicas.

As usinas hidroelétricas que compõem o Sistema Interligado Nacional, SIN, são usualmente agregadas em quatro subsistemas interligados (Sudeste/Centro-Oeste, Sul, Nordeste e Norte), correspondentes à regiões nas quais considera-se que a homogeneidade hidrológica possibilita o uso da representação agregada (ARVANIDITIS; ROSING, 1970). Para estudos de médio prazo que representam as usinas hidroelétricas individualizadamente, a usina de Itaipu, devido às características de seu porte e de interligação, é representada como parte integrante do subsistema SE/CO para efeitos de cálculo de balanço de energias armazenadas e tratada separadamente para efeitos de transporte de energia entre os subsistemas. O esquema da Figura 5.1, página 65 ilustra esta representação, na qual os limites de capacidade de transmissão de energia entre os subsistemas indicados referem-se à configuração de janeiro de 2002. Nesta figura estão representados também os nós de passagem, i.e., nós com demanda nula, correspondentes a Imperatriz do Norte e Ivaiporã.

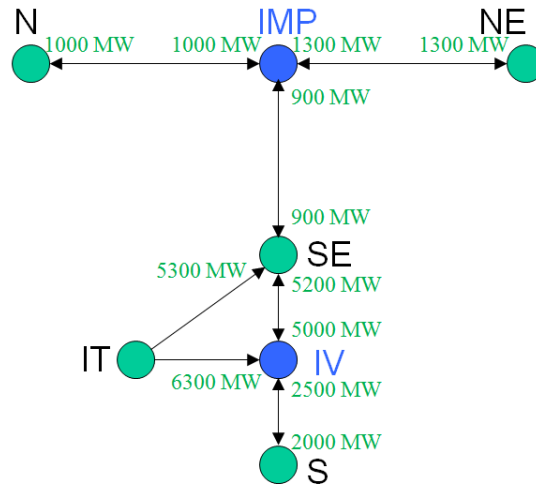


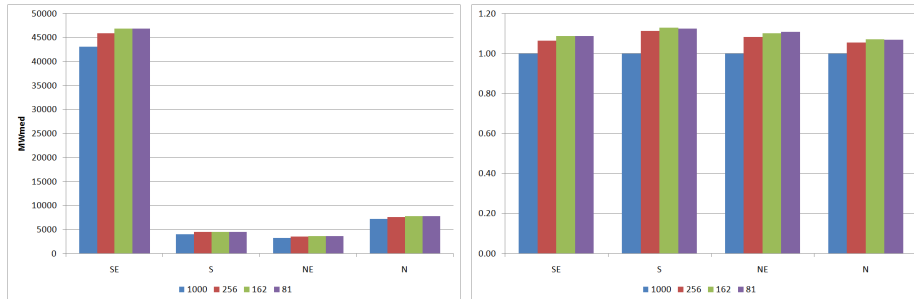
Figura 5.1: Sistema interligado brasileiro

[Fonte: (OLIVEIRA; COSTA, 2002)]

A partir de uma amostra iid de tamanho 1000, considerando como eixos de agregação as energias naturais afluentes aos quatro subsistemas, aplicou-se o método  $k$ -Means para agregar estas vazões em amostras reduzidas de tamanho 81, 162 e 256.

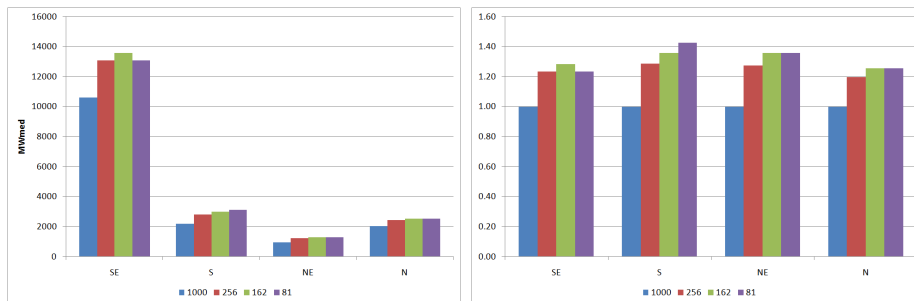
Para o teste da aderência entre as distribuições antes e após a agregação, serão consideradas as energias naturais afluentes de cada subsistema dessazonalizadas e tornadas espacialmente independentes para cada caso de agregação nestas classes contra os 1000 valores iid originais. A Figura 5.2, página 66, apresenta as estimativas da média e do desvio padrão da energia natural afluyente a cada sistema considerando a amostra original de 1000 valores e as três amostras reduzidas. Nota-se que, para todos os quatro subsistemas, a degradação decorrente da agregação foi pequena no que se refere à média, aceitável no que se refere ao desvio padrão e que as maiores diferenças ocorrem para o subsistema Sul. Observando coeficientes de variação das ENAs amostrais e agregadas para os quatro subsistemas, pode ser visto que o subsistema Sul se destaca dos demais (média dos 1000 valores das ENAs é 4040 MWmed, com desvio padrão de 2200 MWmed, correspondendo a um coeficiente de variação de 0,54).

A Figura 5.3, páginas 68 e 69, apresenta as distribuições marginais de probabilidade condicionada das energias naturais afluentes a cada subsistema para os quatro tamanhos de amostra considerados. Pode-se notar, em cada gráfico, que o máximo



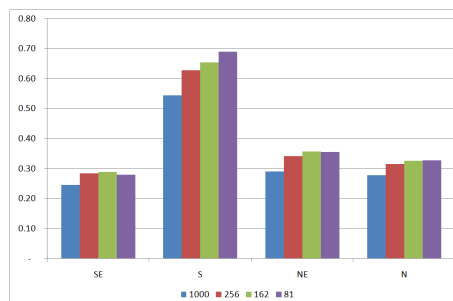
(a) Média (MWmed)

(b) Média (p.u.)



(c) Desvio padrão (MWmed)

(d) Desvio padrão (p.u.)



(e) Coeficiente de variação

Figura 5.2: Média, desvio padrão e coeficiente de variação das energias naturais afluentes (MWmed e p.u.) — método  $k$ -Means, configuração de janeiro de 2002

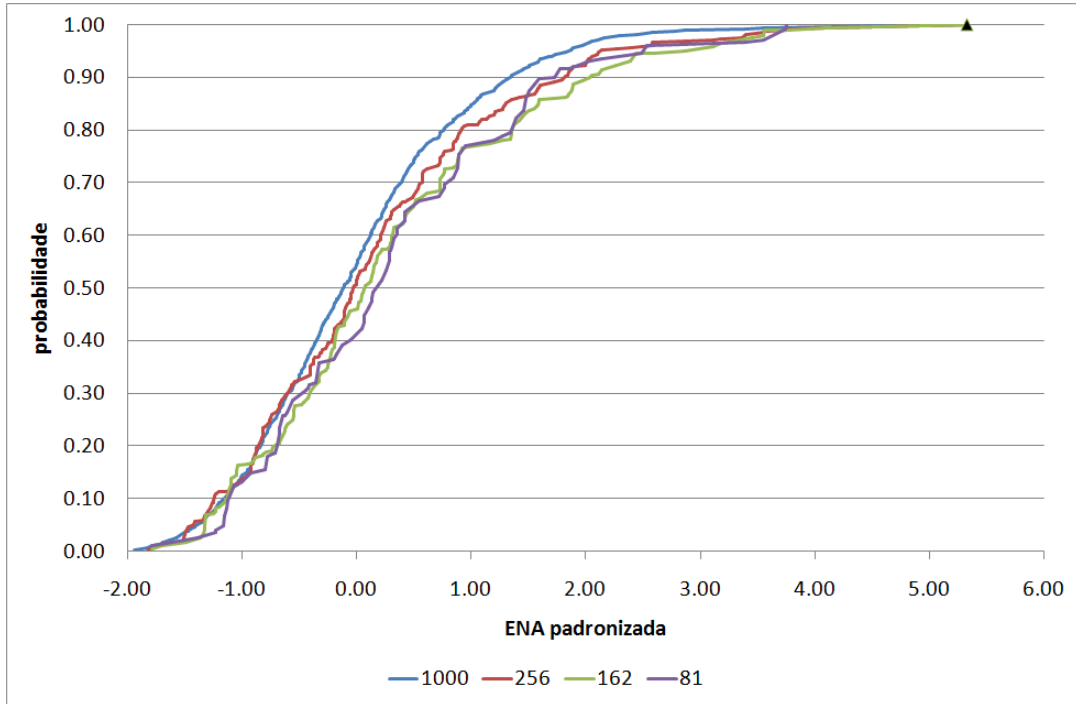
[Fonte: baseado em (OLIVEIRA; COSTA, 2002)]

erro absoluto ocorre nas caudas, para as quais o método de agregação dá menos peso na definição dos agrupamentos, e que os erros absolutos médios são bastante razoáveis para o nível de agregação usado.

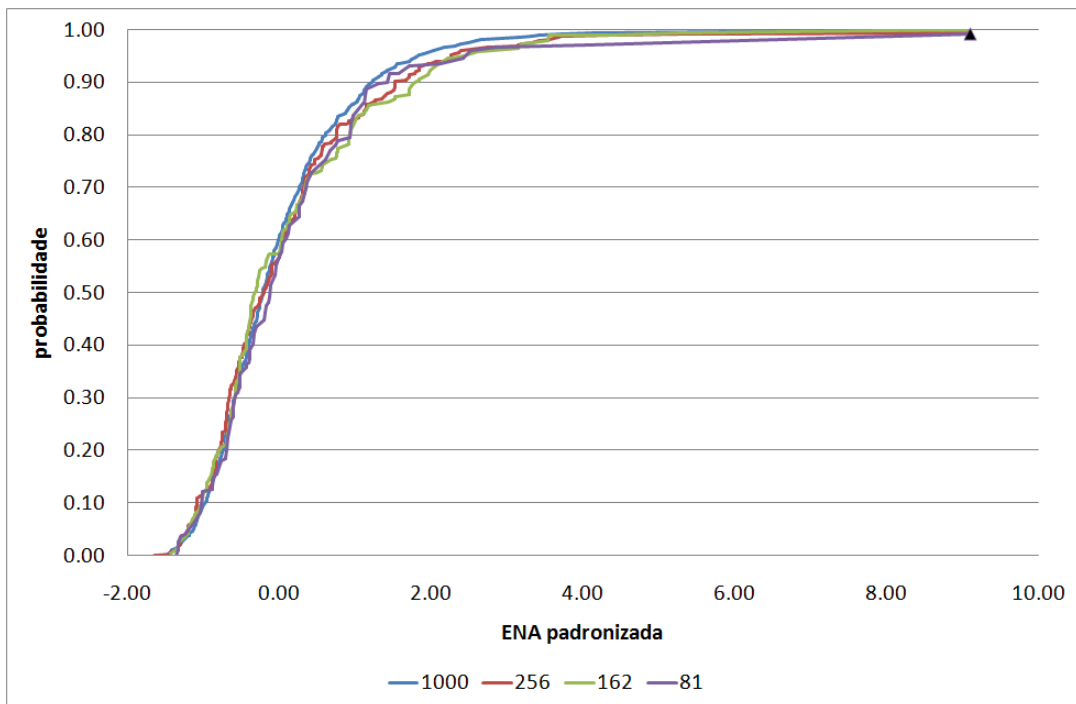
A análise da estabilidade das distribuições condicionadas das energias armazenadas das amostras reduzidas quando comparadas com a amostra iid de tamanho 1000 acima realizada, que levou em conta apenas os aspectos hidrológicos, pode ser considerada como uma condição necessária para alcançar a estabilidade do correspondente problema de otimização. Adicionalmente, índices relacionados a variáveis relevantes do problema de planejamento devem também ser levados em conta para avaliar a estabilidade com respeito aos resultados fornecidos pelo problema de otimização. Os cenários definidos por estas amostras foram então utilizados no modelo de otimização visando avaliar a estabilidade dos resultados. O problema com 1000 cenários possui 97 101 restrições e 311 314 variáveis, com 789 314 valores não-nulos na matriz de coeficientes. O tempo de solução utilizando o algoritmo de pontos interiores implementado em Xpress-Optimizer Barrier (DASH-OPTIMIZATION, 2003) foi de cerca de 6 minutos em um computador Pentium III de 1,1 GHz com 512 Mb de memória RAM. Para os casos com amostras reduzidas, o tempo foi sempre menor do que um minuto (e de apenas alguns segundos para a amostra de tamanho 81). Uma amostra iid com 81 valores foi utilizada com o intuito de comparar os índices obtidos com a amostra reduzida.

A Tabela 5.1, página 70, apresenta, além do valor esperado da geração térmica  $\mathbb{E}[GT]$ , os seguintes índices: para o primeiro estágio os custos marginais  $CMarg(S)$  no subsistema Sul (os custos marginais para os outros subsistemas são nulos), as energias armazenadas  $EA1(\cdot)$  e os intercâmbios em  $MW_{med}$ . (Valores negativos para os intercâmbios significam fluxo no sentido contrário:  $-2\ 809\ MW_{med}$  no ramo SE-IV corresponde a um fluxo de  $2\ 809\ MW_{med}$  do nó IV para o Sudeste.) Para o segundo estágio, estão publicadas as energias armazenadas médias  $\mathbb{E}[EA2(\cdot)]$  nos subsistemas; os custos marginais para o segundo estágio resultaram nulos. Os resultados indicam que, à medida que o tamanho da amostra reduzida aumenta, os índices aproximam-se aos da amostra iid de tamanho 1000.

Em todos os casos reduzidos, os fluxos de energia nas interconexões S-IV, SE-



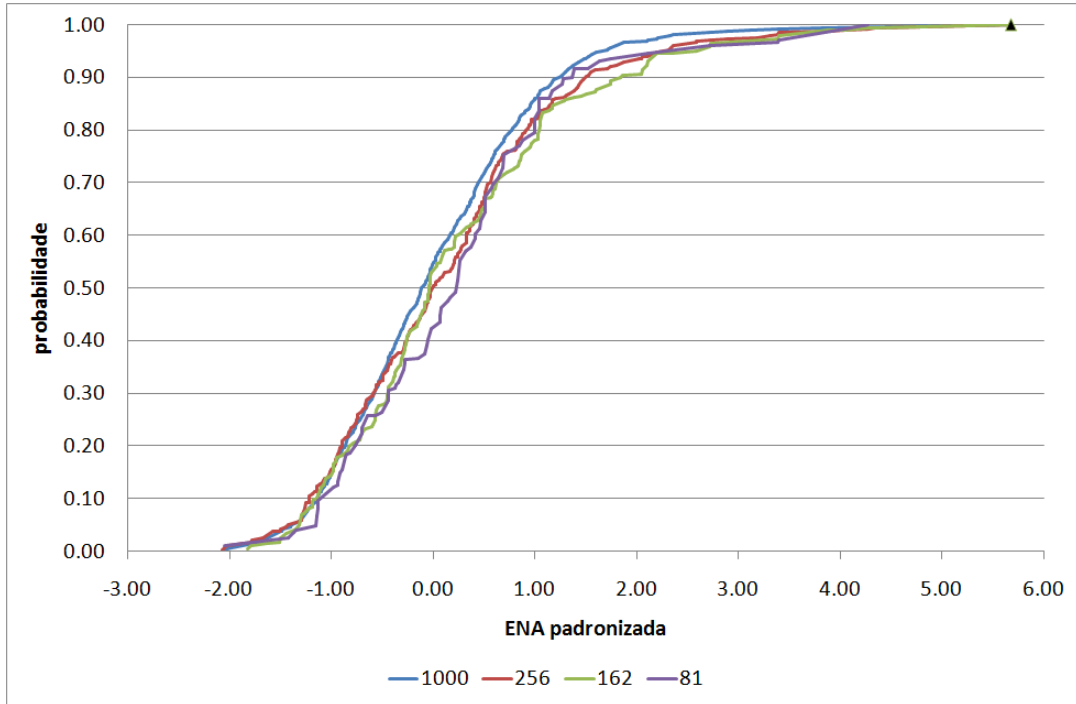
(a) Sudeste



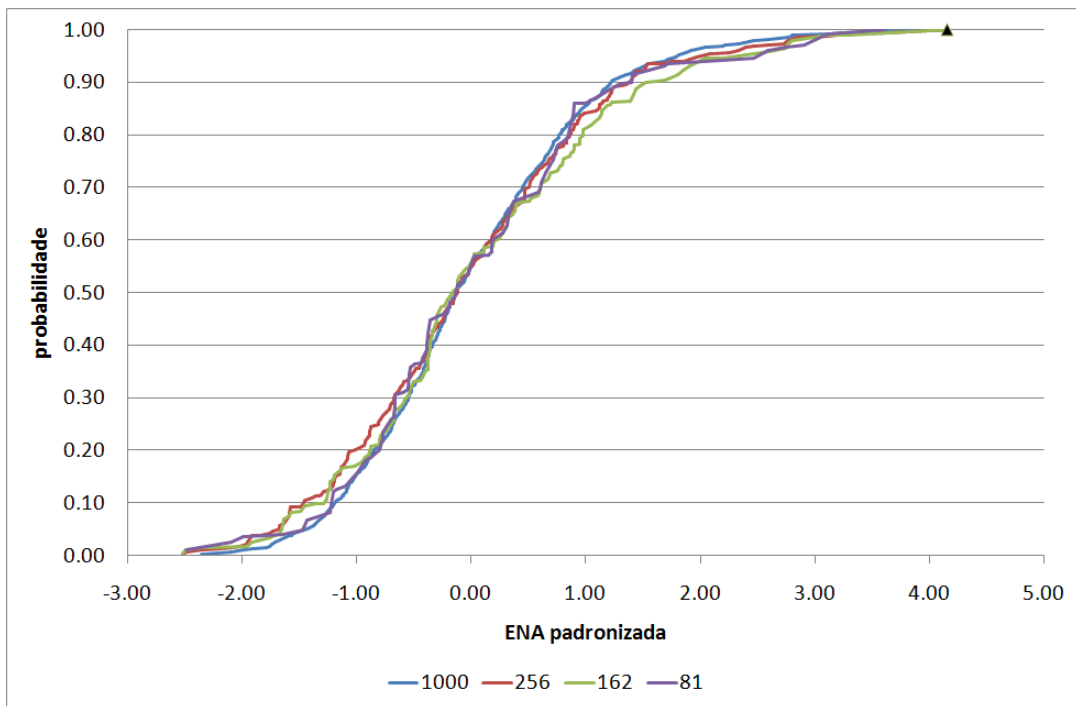
(b) Sul

Figura 5.3: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas (p.u.) — método  $k$ -Means, configuração de janeiro de 2002 (1/2).

[Fonte: baseado em (OLIVEIRA; COSTA, 2002)]



(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 5.3: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas (p.u.) — método  $k$ -Means, configuração de janeiro de 2002 (2/2).

[Fonte: baseado em (OLIVEIRA; COSTA, 2002)]

| Índice                              | Referência | Amostra reduzida |        |        | 81 iid |
|-------------------------------------|------------|------------------|--------|--------|--------|
|                                     | 1000 iid   | 256              | 162    | 81     |        |
| $\mathbb{E}[\text{GT}] (10^3\$)$    | 35 183     | 35 030           | 34 704 | 34 844 | 34 699 |
| EA1(SE)                             | 46 339     | 46 367           | 46 366 | 46 273 | 45 975 |
| EA1(S)                              | 985        | 985              | 983    | 970    | 1 033  |
| EA1(NE)                             | 9 346      | 9 346            | 9 346  | 9 364  | 10 034 |
| EA1(N)                              | 495        | 497              | 496    | 492    | 582    |
| CMarg(S) (\$)                       | 5,7        | 5,7              | 5,6    | 5,7    | 5,6    |
| SE-IV                               | -2 809     | -2 774           | -2 522 | -2 485 | -2 712 |
| SE-IT                               | -4 805     | -4 782           | -4 643 | -4 602 | -4 699 |
| SE-IMP                              | -900       | -900             | -900   | -900   | -895   |
| S-IV                                | -2 000     | -2 000           | -2 000 | -2 000 | -2 000 |
| NE-IMP                              | -1 300     | -1 300           | -1 300 | -1 300 | -1 300 |
| N-IM                                | 1 000      | 1 000            | 1 000  | 1 000  | -105   |
| IT-IV                               | 4 809      | 4 773            | 4 522  | 4 485  | 4 712  |
| $\mathbb{E}[\text{EA2}(\text{SE})]$ | 73 300     | 73 473           | 73 014 | 72 840 | 73 269 |
| $\mathbb{E}[\text{EA2}(\text{S})]$  | 1 135      | 1 085            | 1 147  | 1 113  | 1 344  |
| $\mathbb{E}[\text{EA2}(\text{NE})]$ | 15 350     | 15 399           | 15 486 | 15 393 | 16 681 |
| $\mathbb{E}[\text{EA2}(\text{N})]$  | 4 787      | 4 754            | 4 959  | 4 991  | 5 173  |

Tabela 5.1: Índices de estabilidade

[Fonte: (OLIVEIRA; COSTA, 2002)]

IMP, NE-IMP e N-IMP estão no limite de capacidade no estágio um, enviando energia do subsistema N para os subsistemas Ne e Se, e de Itaipu para o Sul. O valor esperado do custo de operação é o índice mais importante para avaliar a estabilidade e pode-se notar que com a amostra reduzida de tamanho **81** este valor é razoavelmente bem estimado. Todos os índices são próximos daqueles obtidos com a referência de tamanho **1000**, o que indica que amostras reduzidas com **81** cenários tem uma cardinalidade adequada.

Pode-se notar que os índices obtidos para a amostra iid de tamanho **81** são mais discrepantes do que aqueles obtidos com a amostra agregada de mesmo tamanho, indicando que a agregação concorre para fornecer resultados melhores. O tempo de computação necessário para obter os **81** representantes foi de poucos segundos, largamente compensados pela redução alcançada no tempo de processamento do problema de otimização.

## 5.2 Cotejo das técnicas de redução propostas

Com o propósito de aprofundar a análise dos diversos métodos de agregação propostos, a metodologia proposta foi aplicada ao Sistema Interligado Nacional, considerando configurações baseadas nos Programas Mensais de Operação do ano de 2003 para os meses de fevereiro (período úmido), maio (início do período seco), agosto (período seco) e novembro (início do período úmido). Estas configurações, com algumas características listadas na Tabela 5.2, página 72, são compostas por usinas localizadas nos quatro subsistemas interligados. Nesta tabela, os postos de vazão associados às usinas estão classificados como postos principais, i.e., aqueles cujas correlações cruzadas (correlações espaciais) são todas menores do que ou iguais a **0,97**; postos satélites, i.e., postos cujas vazões podem ser obtidas por meio de regressões lineares com os postos principais e postos artificiais, i.e., aqueles cujas vazões incrementais são constantes.

O procedimento adotado para avaliar os métodos propostos para construção de árvores reduzidas consiste em ajustar, para cada um destes casos, um modelo PAR(1), conforme descrito no item 4.1.1, obtendo para cada posto principal  $j$  os



|     |                    | Caso     |          |          |          |
|-----|--------------------|----------|----------|----------|----------|
|     |                    | fev 2003 | mai 2003 | ago 2003 | nov 2003 |
| SIN | Cap Instalada (MW) | 77 512   | 78 826   | 79 396   | 79 987   |
| UHE | Cap Instalada (MW) | 68 847   | 69 662   | 70 247   | 70 691   |
|     | Total de usinas    | 95       | 98       | 98       | 101      |
|     | Postos principais  | 47       | 49       | 49       | 51       |
|     | Postos satélites   | 35       | 36       | 36       | 36       |
|     | Postos artificiais | 13       | 13       | 13       | 14       |
| UTE | Cap Instalada (MW) | 8 665    | 9 164    | 9 149    | 9 296    |
|     | Total de usinas    | 59       | 86       | 82       | 84       |

Tabela 5.2: Características das configurações

[Fonte: elaboração própria, a partir de dados obtidos em ONS, [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br)]

parâmetros  $\mu_{\tau}^j$ ,  $\sigma_{\tau}^j$  e  $\rho_{\tau}^j$  e a matriz de carga triangular  $\mathbf{C}$  que representa a matriz de correlação espacial. Os parâmetros assim definidos são usados no processo de geração de séries para os postos principais. Estas séries são completadas para os postos satélites e para os postos artificiais (postos sem vazão natural).

Em seguida, amostras iid de tamanho 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 8000 e 10000 foram construídas, de forma incremental, pelo processo de geração implementado no modelo BONSAI para cada um dos quatro casos acima mencionados. Cada uma destas amostras iid foi fornecida como dado de entrada para cada um dos métodos de redução e os respectivos representantes de cada uma destas amostras iid foram definidos. A Figura 5.4 (a), página 74, ilustra a geração de amostras reduzidas e de tamanho fixo (81, neste caso) a partir de uma mesma semente (denotada s01), considerando amostras iid de tamanhos variando entre 1000 e 10000. Para avaliar a sensibilidade dos resultados com respeito a diferentes amostras iid de mesmo tamanho, foram geradas dez amostras iid diferentes, cada uma de tamanho 1000, ..., 10000, a partir de dez sementes diferentes (s01, s02, ..., s10) informadas ao gerador de números pseudo-aleatórios. Em seguida, foram identificados os representantes de cada uma destas amostras, considerando todas as quatro técnicas de

redução propostas. A Figura 5.4 (b), página 74, ilustra o procedimento utilizado para agregar as diferentes amostras *iid* em amostras reduzidas de tamanho 81.

Este conjunto de amostras *iid* e respectivas amostras reduzidas foi utilizado para avaliar os métodos propostos tanto sob o ponto de vista de adequação a aspectos de representação hidrológica quanto aos resultados obtidos com o seu uso no modelo de planejamento da operação de médio prazo.

Para a geração da árvore de cenários para o primeiro mês estocástico, o parque gerador foi dividido em quatro subsistemas — Sul, Sudeste, Norte e Nordeste — e foram estabelecidas 81 classes, a partir dos resultados reportados no item 5.1. Este número de classes possibilita, idealmente, a seleção de representantes correspondentes à ocorrência de todas as possíveis combinações de cenários com energias afluentes altas (A), médias (M) e baixas (B) em cada um dos subsistemas que compõem o sistema gerador. (Cabe ressaltar que a classificação A, M, B está condicionada ao estado hidrológico do sistema, não se tratando de valores absolutos.)

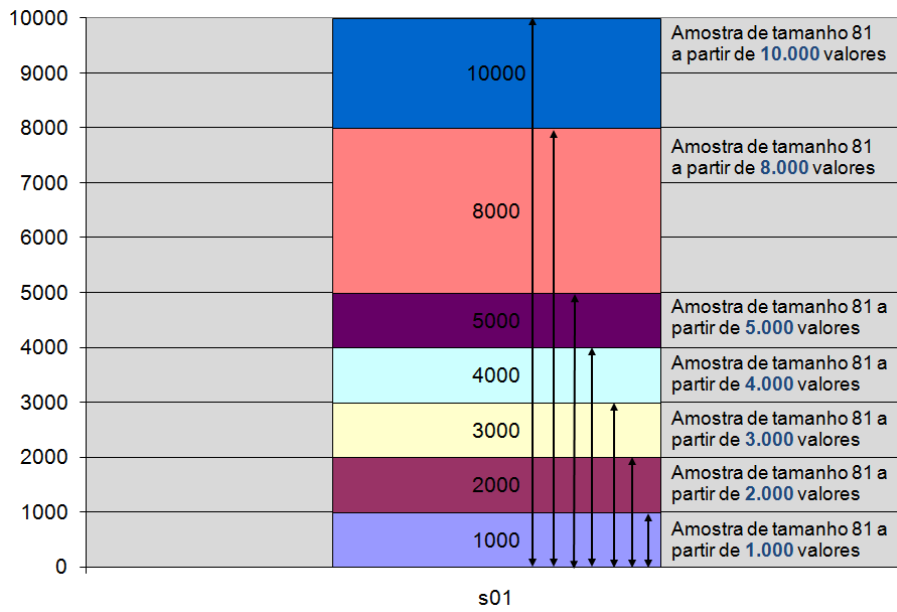
## 5.3 Aspectos hidrológicos

Nesta seção serão analisados os diversos métodos de redução de cenários quanto aos aspectos relacionados à representação das afluências. A análise será realizada considerando o ajuste das distribuições marginais dos representantes das energias naturais afluentes a cada um dos subsistemas para todos os tamanhos de amostra *iid* considerados e índices de ajuste dos momentos amostrais média e desvio padrão condicionados. Neste item serão mostrados os resultados referentes ao mês de maio de 2003, os resultados para os demais meses são análogos.

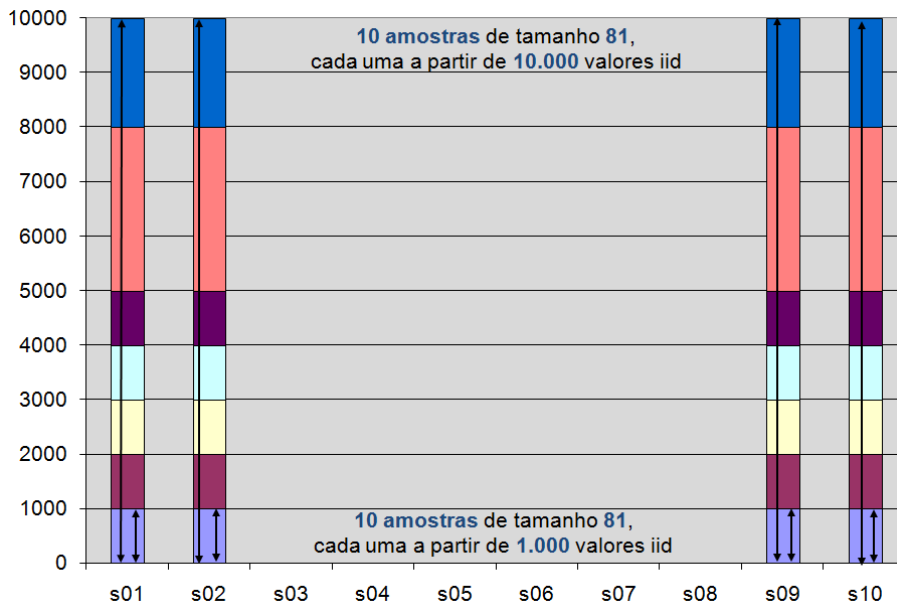
### 5.3.1 *k*-Means

Com as premissas mencionadas acima, o processo de agregação utilizando a técnica *k*-Means foi aplicado para sete amostras equiprováveis de tamanhos 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 8000 e 10000, para todos os quatro casos.

Os gráficos da Figura 5.5, páginas 76 e 77, apresentam a forma das distribuições



(a) Uma amostra (a partir de uma única semente,  $s_{01}$ )



(b)  $n$  amostras (cada amostra a partir de semente diferente)

Figura 5.4: Geração de amostras iid e correspondentes amostras reduzidas

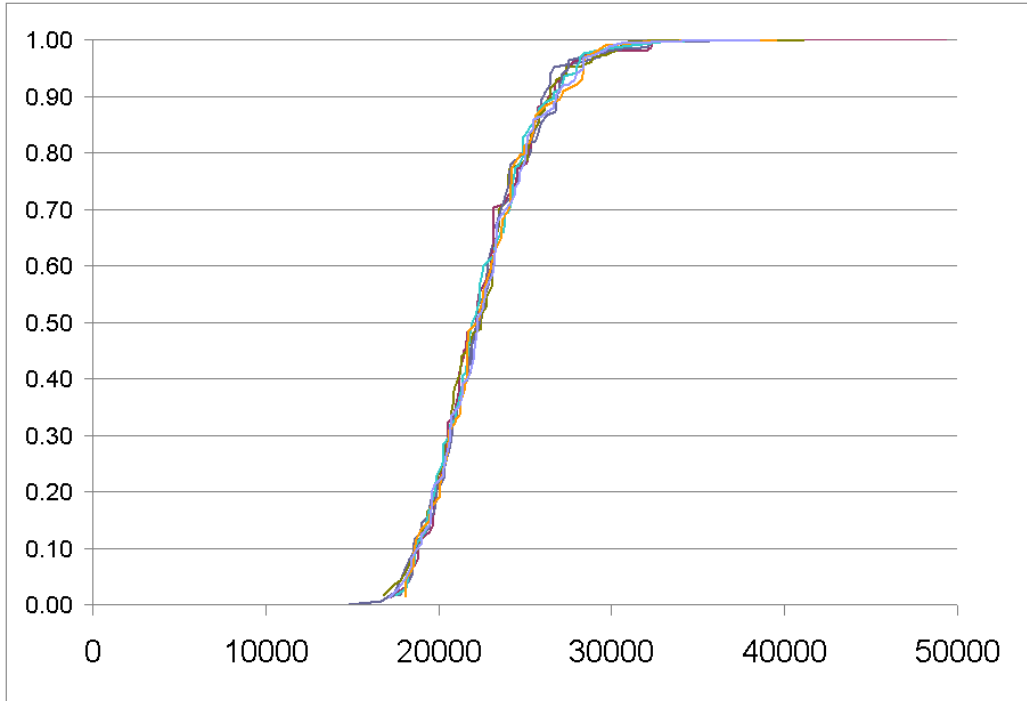
[Fonte: elaboração própria]

marginais condicionadas dos representantes das energias naturais afluentes a cada um dos subsistemas para todos os tamanhos de amostra considerados. Nesta figura, pode-se observar que não há degraus na distribuição acumulada e que temos valores altos, médios e baixos em todos os subsistemas. Por exemplo, para o subsistema SE o menor valor da ENA é de 17 240 MWmed, que corresponde a 0,65 da média de longo termo (MLT) da ENA observada no mês de maio (26 690) MWmed, e o maior valor é de 35 242 MWmed, correspondente a 1,32 vezes a MLT. Cabe ressaltar que não se dispõe de uma distribuição histórica *condicionada* para as energias afluentes, de forma que não se pode realizar uma verificação do ajuste entre a distribuição empírica e histórica.

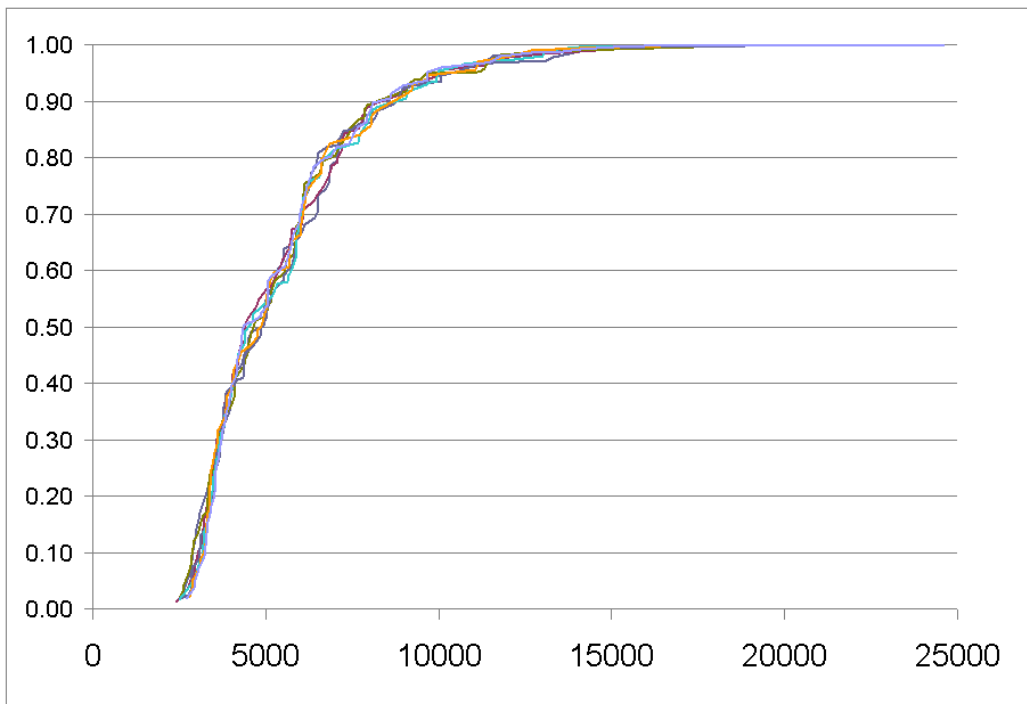
Já para o subsistema Sul, o maior valor histórico observado para a ENA durante o mês de maio no subsistema Sul é de 23 394 MWmed, sendo a média de longo termo igual a 5 913 MWmed. Entretanto, existe um representante com ENA igual a 32 171 MWmed, obtido a partir das amostras de tamanho 6000 e 7000. Este representante apresenta um componente com 5,45 vezes a média histórica, nitidamente um valor discrepante (outlier). Este valor, que corresponde a 1,47 vezes o máximo histórico registrado, é o representante de uma classe com apenas dois elementos, ressaltando a característica (indesejada, para os propósitos desta aplicação) da classificação resultante da aplicação do método *k*-Means ser muito influenciada pela presença de elementos discrepantes.

A Figura 5.6, páginas 78 e 79, compara a distribuição marginal amostral condicionada das energias afluentes padronizadas obtida a partir de uma amostra *iid* de tamanho 4000 com a correspondente distribuição condicionada das 81 energias padronizadas agregadas pelo método *k*-Means. Esta figura mostra que o ajuste entre estas distribuições é adequado e percebe-se que os elementos extremos gerados são mapeados em representantes menos afastados dos valores médios (os valores extremos máximos estão destacados). A Tabela 5.3, página 81, que apresenta os valores extremos amostrais e dos representantes selecionados, complementa a informação destes gráficos.

A Figura 5.7, página 80, apresenta o efeito da agregação em termos das médias e desvios-padrão condicionados das vazões incrementais agregadas para os postos



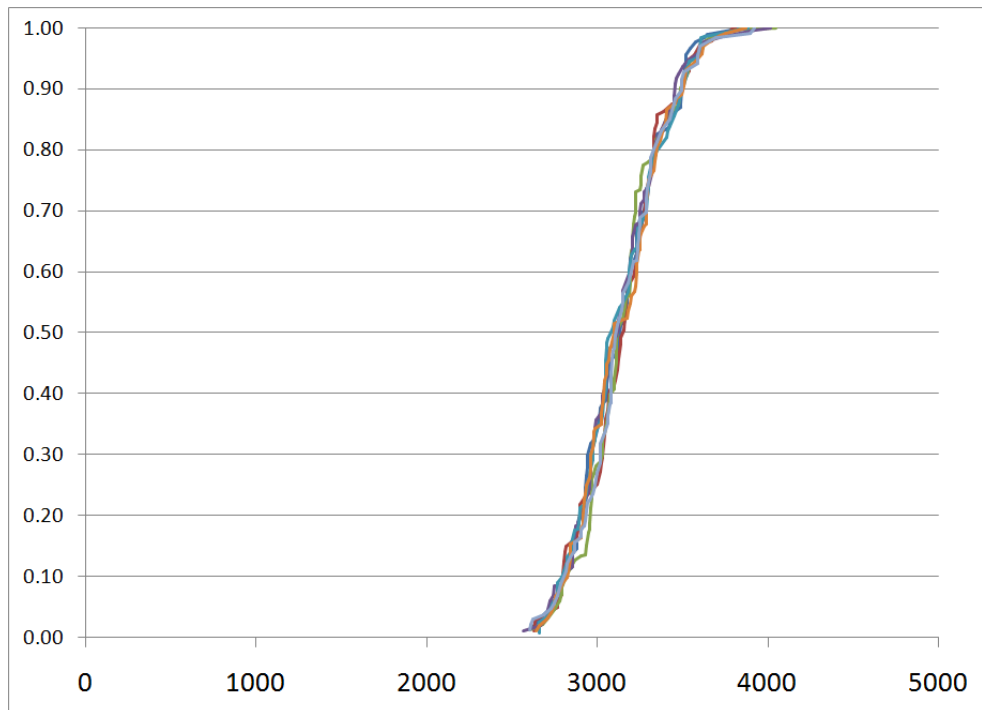
(a) Sudeste



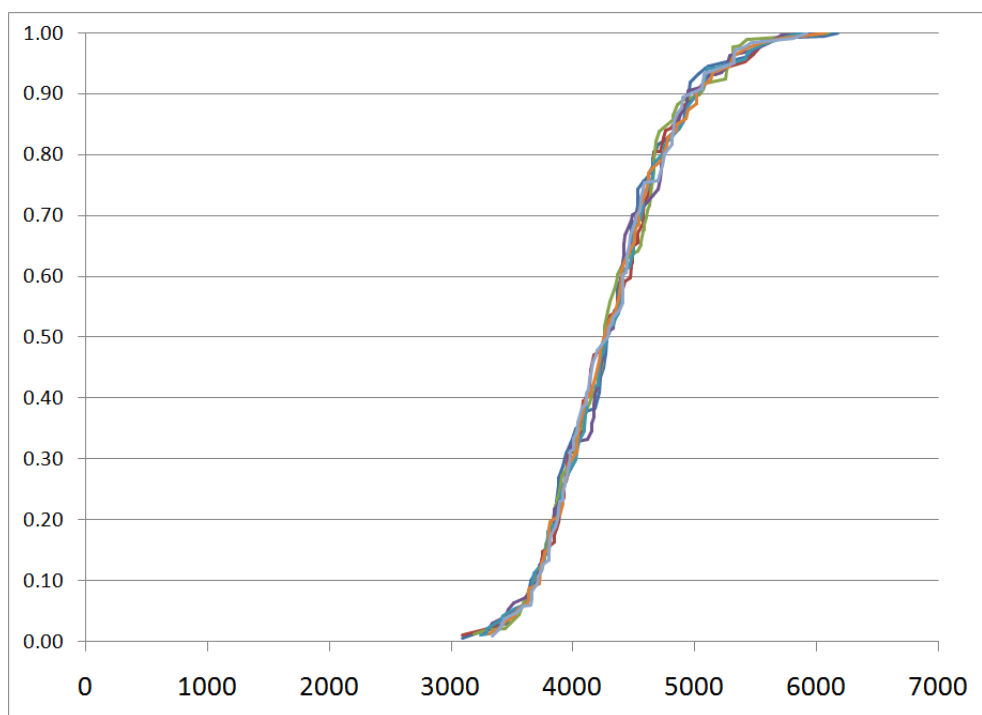
(b) Sul

Figura 5.5: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means (MWmed) (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



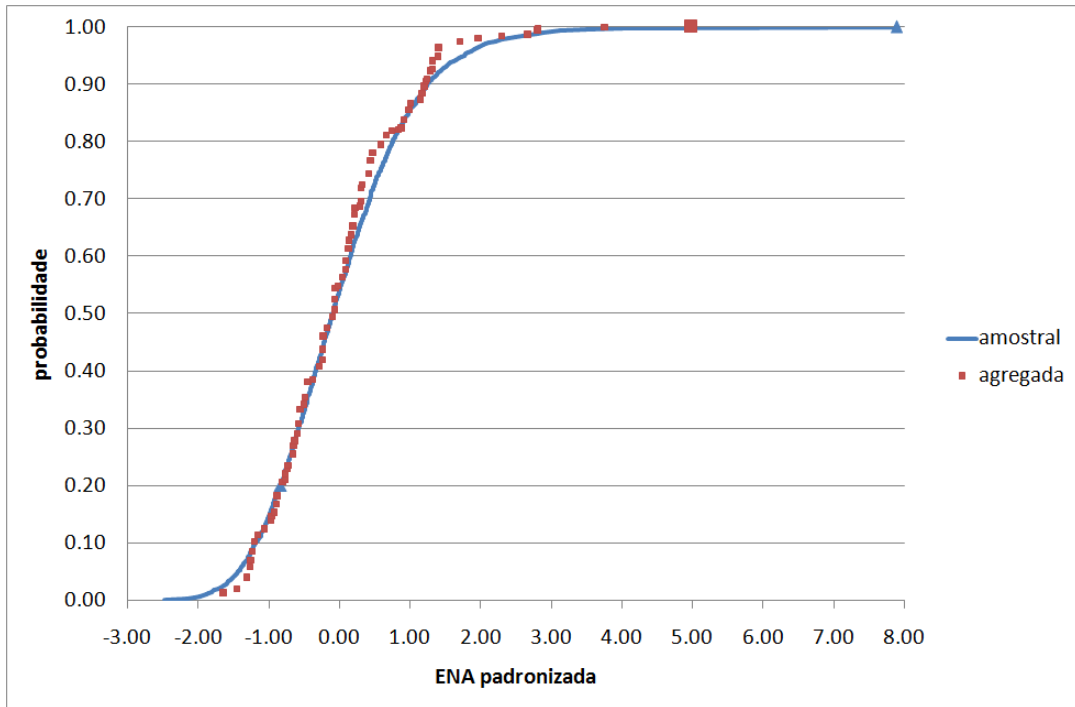
(c) Nordeste



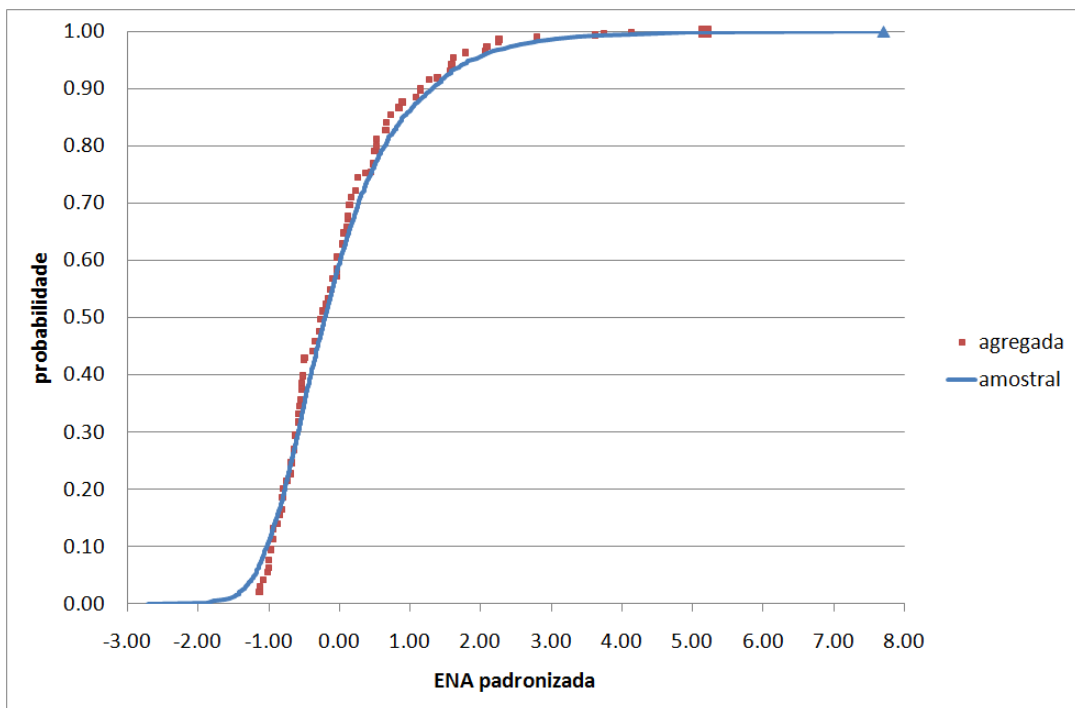
(d) Norte

Figura 5.5: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means (MWmed) (2/2).

[Fonte: elaboração própria]



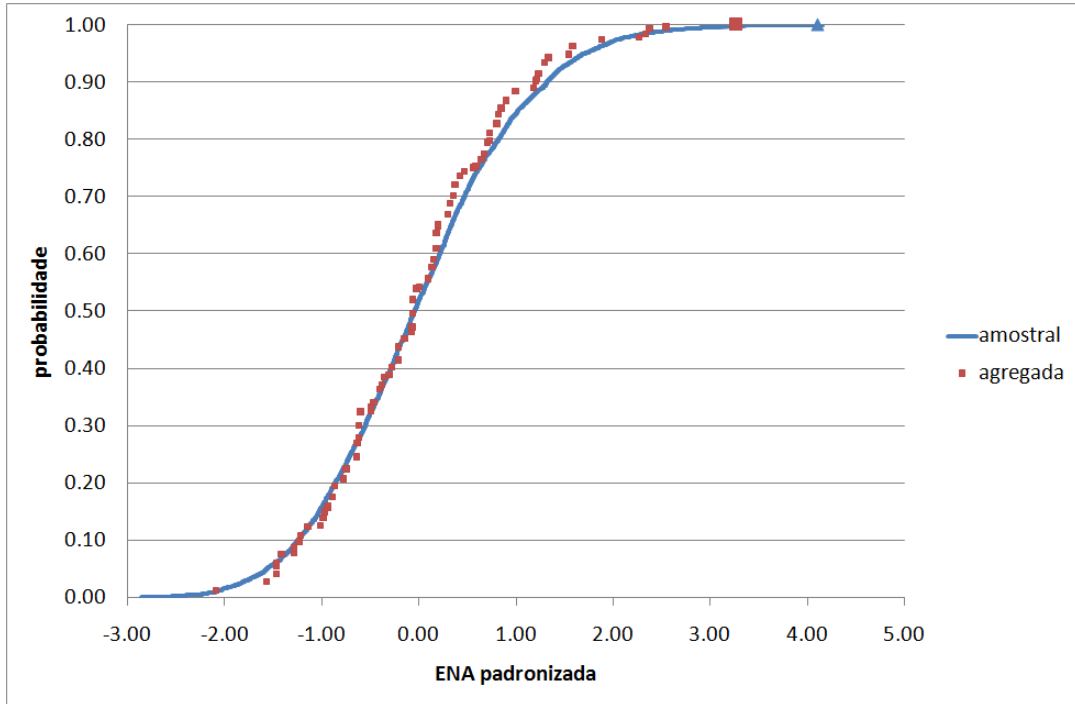
(a) Sudeste



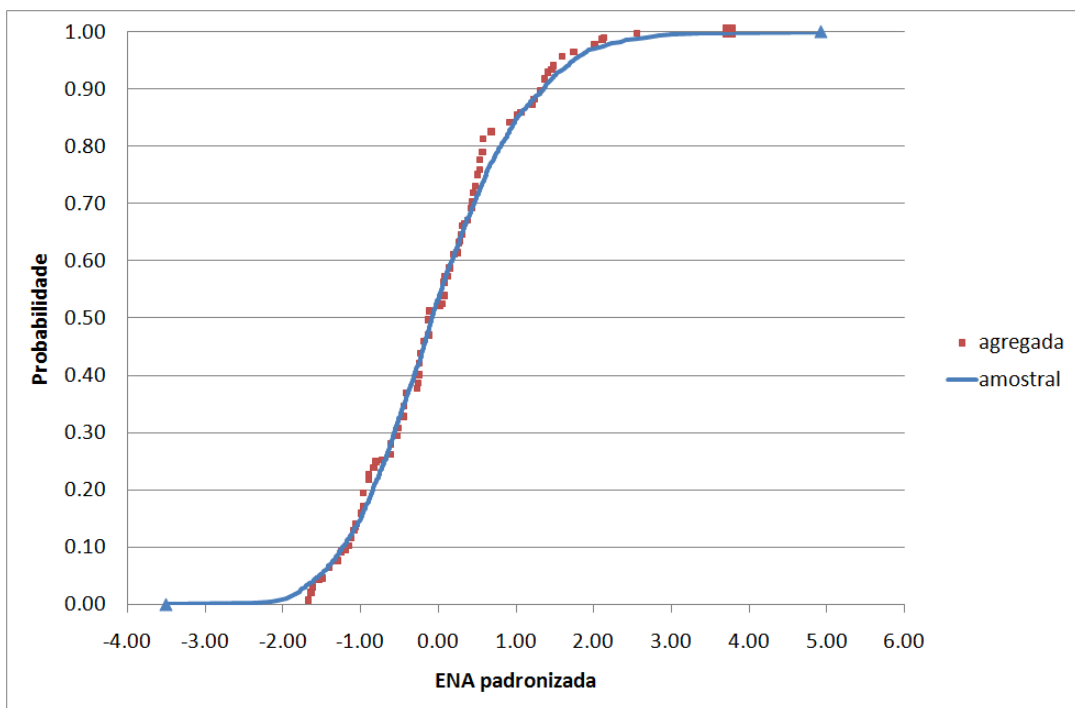
(b) Sul

Figura 5.6: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means (p.u.) (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 5.6: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means (p.u.) (2/2).

[Fonte: elaboração própria]



principais, em relação aos valores teóricos de cada posto (em p.u.). Nota-se que há uma boa aderência entre os valores agregados e os teóricos: para a média os valores obtidos estão todos muito próximos de um (o valor médio entre todos os postos é 0,999; com desvio padrão 0,018), e para os desvios padrão o intervalo de variação está limitado a  $\pm 0,2$  (média de 0,976 e desvio padrão 0,091).

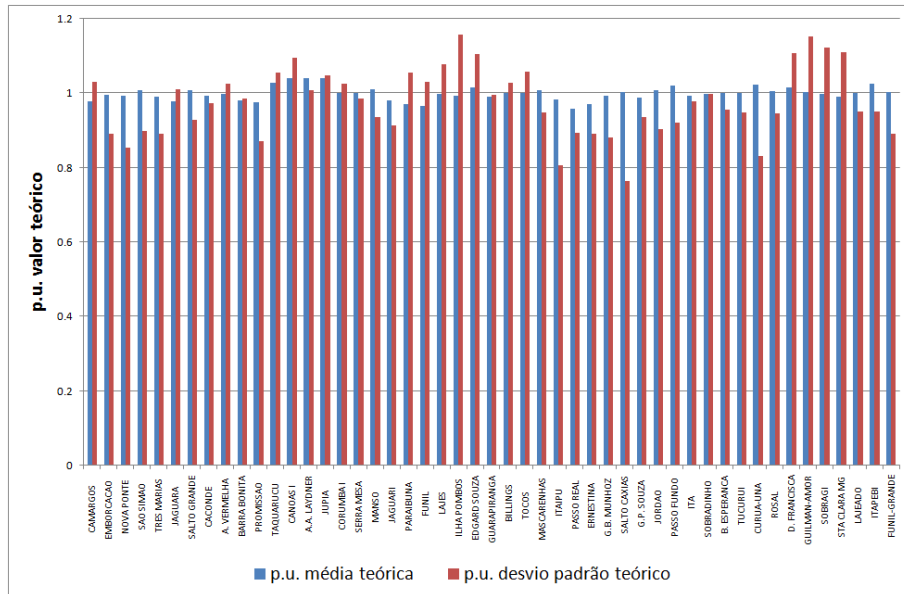


Figura 5.7: Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por *k*-Means [Fonte: elaboração própria]

Outra questão que se coloca é verificar se os representantes selecionados recobrem o espaço amostral de forma conveniente. Uma estimacão deste recobrimento foi feita considerando cada eixo de ENA estratificado em três classes, como proposto pelo método reticulado e calculando a percentagem destas classes contendo os representantes selecionados. Espera-se que a escolha dos representantes seja tal que haja um deles em cada uma das 81 possíveis células. A Figura 5.8 apresenta, para as dez amostras iid de tamanho 4000 geradas a partir de diferentes sementes, o recobrimento das classes A, M, B. Estas classes são definidas a partir da divisão do eixo de energias naturais afluentes, de amplitude  $\Delta = (ENA \text{ máxima} - ENA \text{ mínima})$  calculada a partir da amostra iid, em intervalos  $[0,00, 0,25)\Delta$ , correspondente à classe B;  $[0,25, 0,75)\Delta$  correspondente à classe M; e  $[0,75, 1,00)\Delta$ , correspondente à classe A. Nota-se que, para todos os dez casos considerados, há falta de repre-

|        |                 | Subsistema |       |          |       |
|--------|-----------------|------------|-------|----------|-------|
|        | Método          | Sudeste    | Sul   | Nordeste | Norte |
| mínimo | Amostrai        | -2,47      | -2,70 | -2,86    | -3,50 |
|        | <i>k</i> -Means | -1,64      | -1,12 | -2,08    | -1,67 |
|        | Redução ótima   | -1,55      | -1,37 | -1,54    | -1,80 |
|        | Reticulado      | -1,51      | -1,53 | -1,52    | -1,57 |
|        | Comp. Principal | -1,65      | -1,44 | -0,39    | -2,31 |
| máximo | Amostrai        | 7,89       | 7,71  | 4,16     | 4,93  |
|        | <i>k</i> -Means | 4,99       | 5,19  | 3,27     | 3,76  |
|        | Redução ótima   | 1,39       | 0,80  | 1,58     | 2,07  |
|        | Reticulado      | 1,96       | 2,55  | 1,63     | 1,81  |
|        | Comp. Principal | 2,56       | 4,30  | 0,36     | 3,34  |

Tabela 5.3: Valores extremos para ENAs padronizadas amostrais (amostra iid de tamanho 4000) e agregadas, para maio de 2003 (p.u.)

[Fonte: elaboração própria]

representantes em muitas classes (cerca 38% das classes não são representadas quando os representantes são selecionados a partir de dez amostras iid de tamanho 4000, Figura 5.9), página 83, enquanto algumas classes contêm um número elevado deles.

O recobrimento das células não se torna mais completo com o aumento da cardinalidade da amostra iid considerada, como mostra a Figura 5.10, página 84. Este padrão se repete para todos os demais meses analisados. Portanto, o processo de seleção de representantes por meio da técnica *k*-Means não garante que exista um representante em cada uma das possíveis células.

Cabe ressaltar que, embora o algoritmo de agregação proposto por (HARTIGAN; WONG, 1979) para *k*-Means seja eficiente, o aumento do tamanho da amostra aleatória tem impacto significativo no esforço computacional necessário para selecionar os representantes: enquanto que para amostras de tamanho 1000 o tempo de CPU é da ordem de 20 segundos, para amostras de 4000 o tempo passa a 20 minutos e para amostras de tamanho 10000 o algoritmo consome cerca de 5 horas e 20 minutos em um micro computador Pentium IV com 2,66GHz e 512MB de memória RAM.

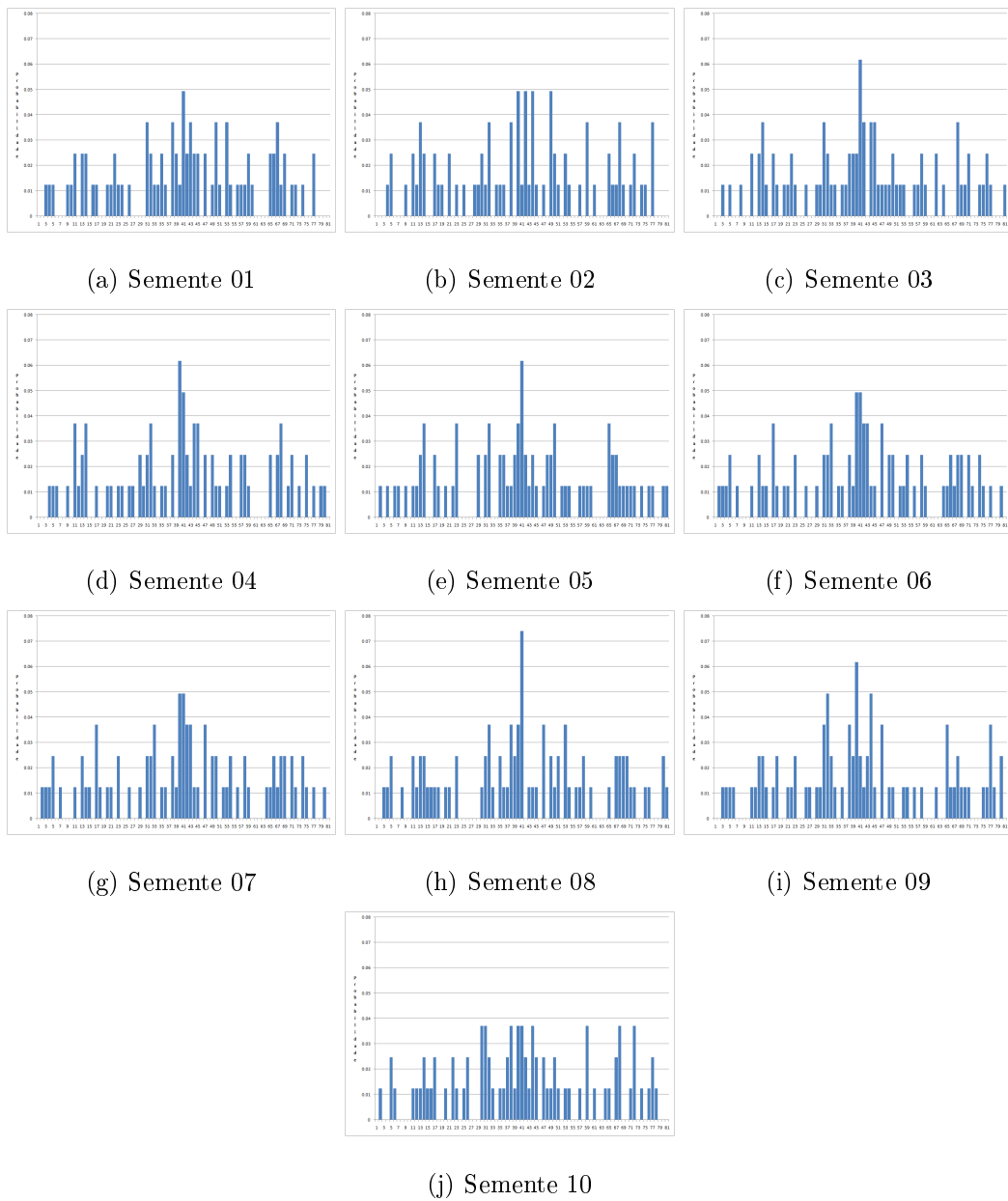


Figura 5.8: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means considerando dez amostras iid de tamanho 4000

[Fonte: elaboração própria]

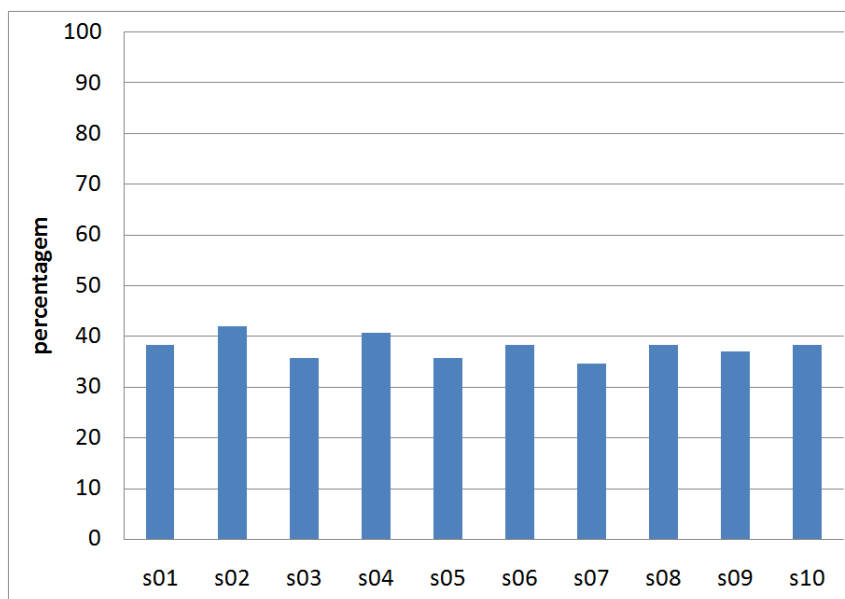


Figura 5.9: Percentagem de classes  $(A, M, B)^4$  com falhas, método  $k$ -Means  
 [Fonte: elaboração própria]

Resultados análogos foram obtidos para os casos de fevereiro, agosto e novembro.

### 5.3.2 Redução recursiva

A Figura 5.11, páginas 85 e 86, apresenta a forma das distribuições marginais condicionadas dos representantes das energias naturais afluentes a cada um dos subsistemas. Pode-se observar que não ocorrem valores extremos, sendo o maior valor para o representante do subsistema Sul igual a 9 225 MWmed, cerca de 1,56 vezes a média histórica de longo termo para o mês de maio.

A Figura 5.12, páginas 87 e 88, compara a distribuição marginal amostral condicionada das energias afluentes padronizadas obtida a partir de uma amostra iid de tamanho 4000 com a correspondente distribuição condicionada das 81 energias padronizadas agregadas pelo método de recursão recursiva. Esta figura mostra que o ajuste entre estas distribuições marginais condicionadas fica menos aderente à medida que as ENAs crescem (os valores extremos máximos estão destacados). A Tabela 5.3, página 81, que apresenta os valores extremos amostrais e dos representantes selecionados, complementa a informação destes gráficos.

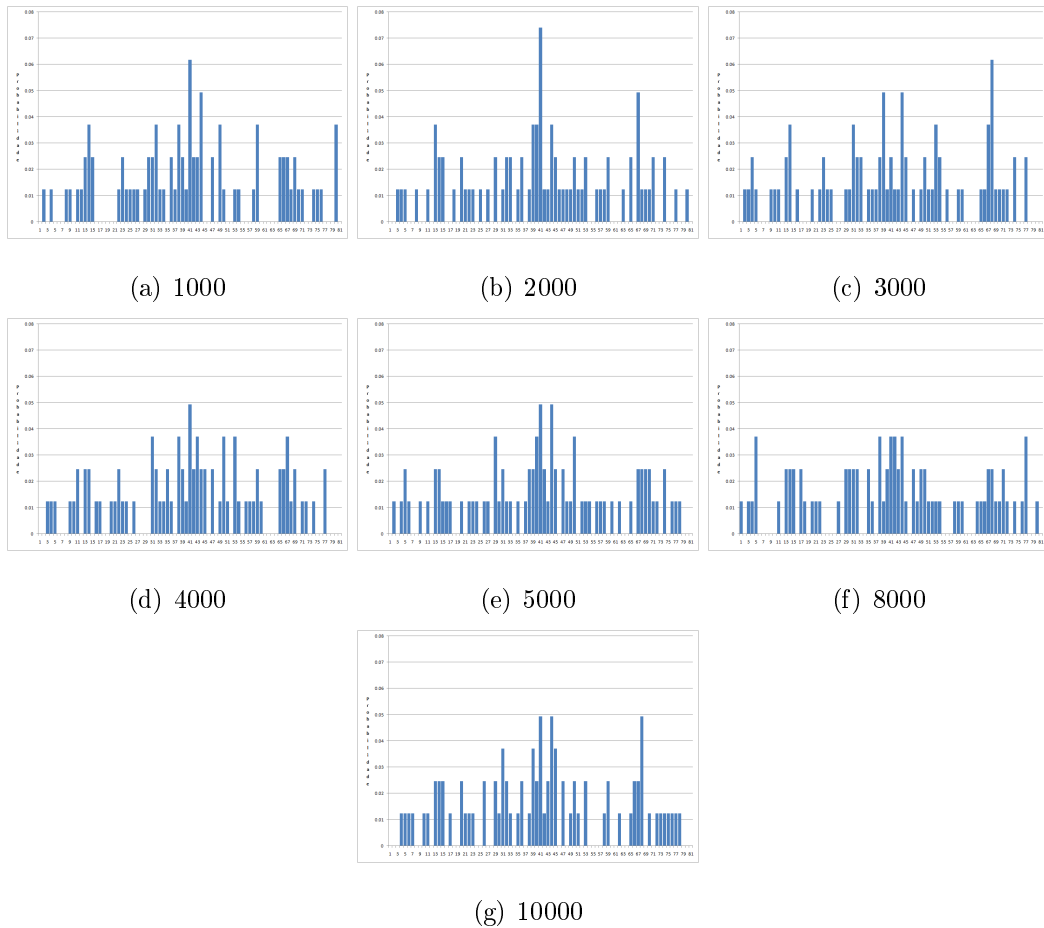
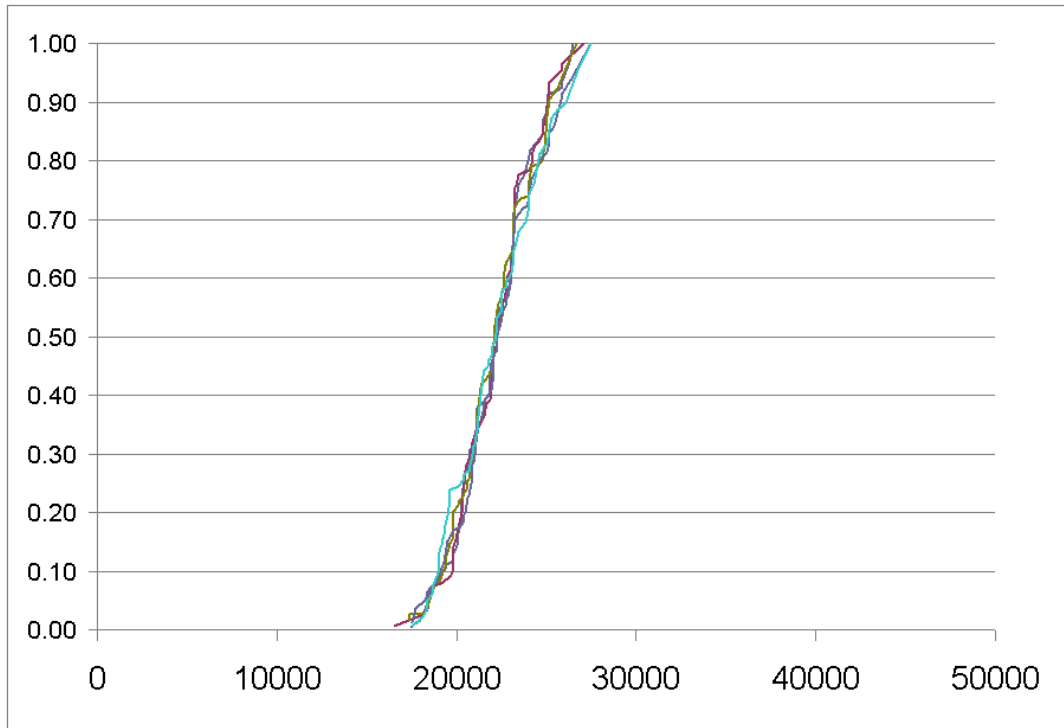
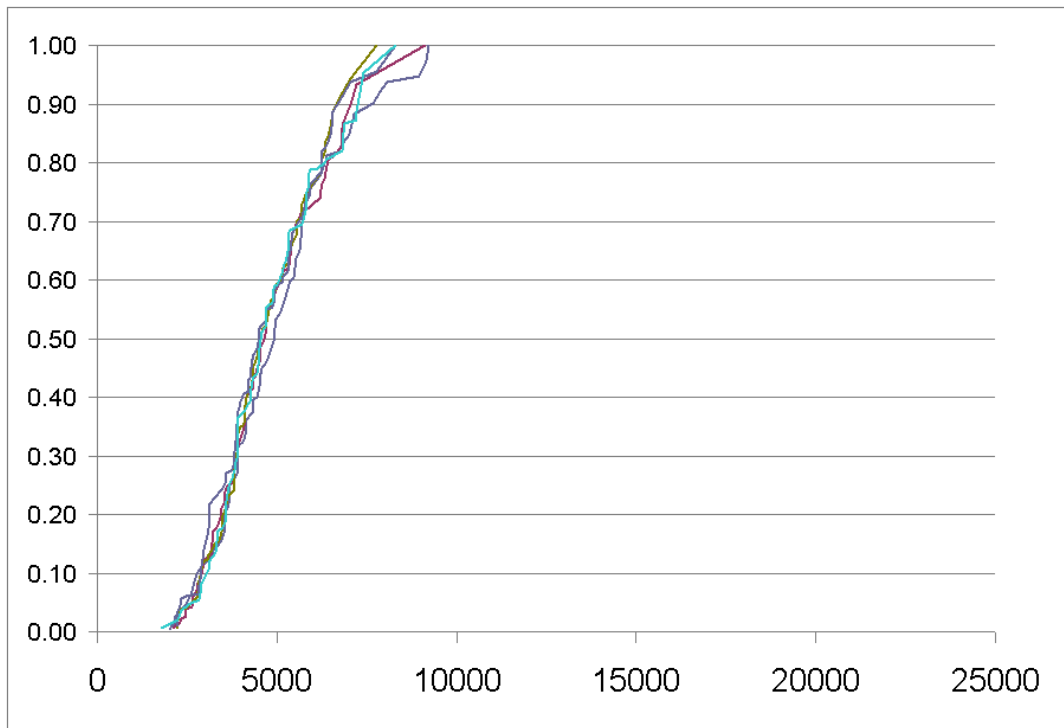


Figura 5.10: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos por  $k$ -Means considerando amostras iid de tamanhos diferentes

[Fonte: elaboração própria]



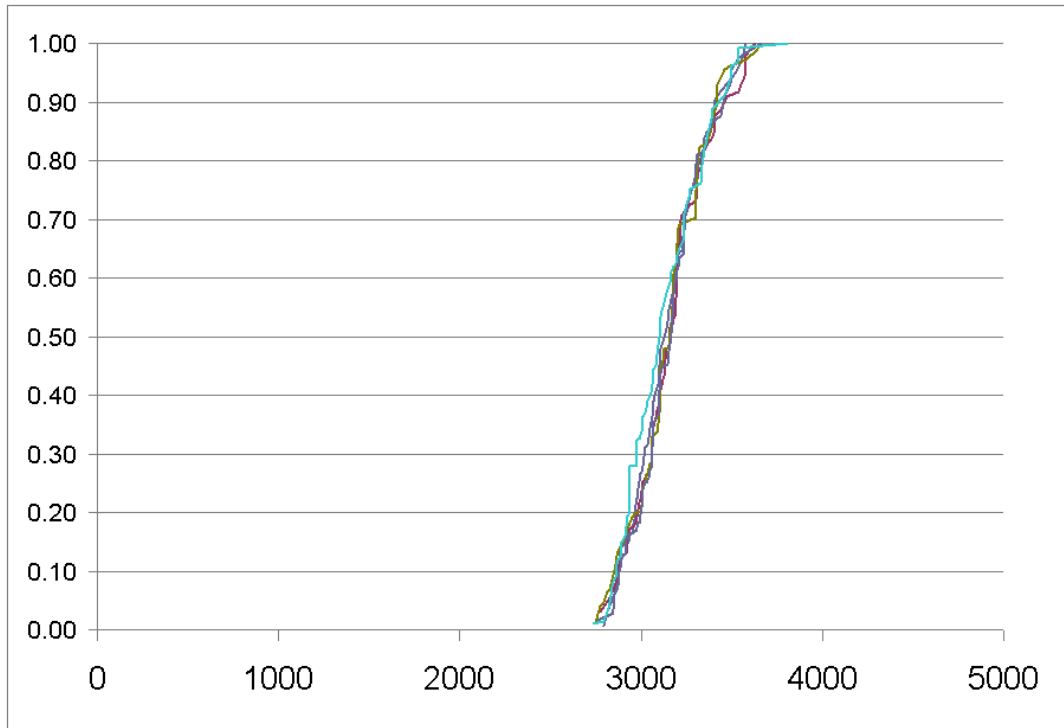
(a) Sudeste



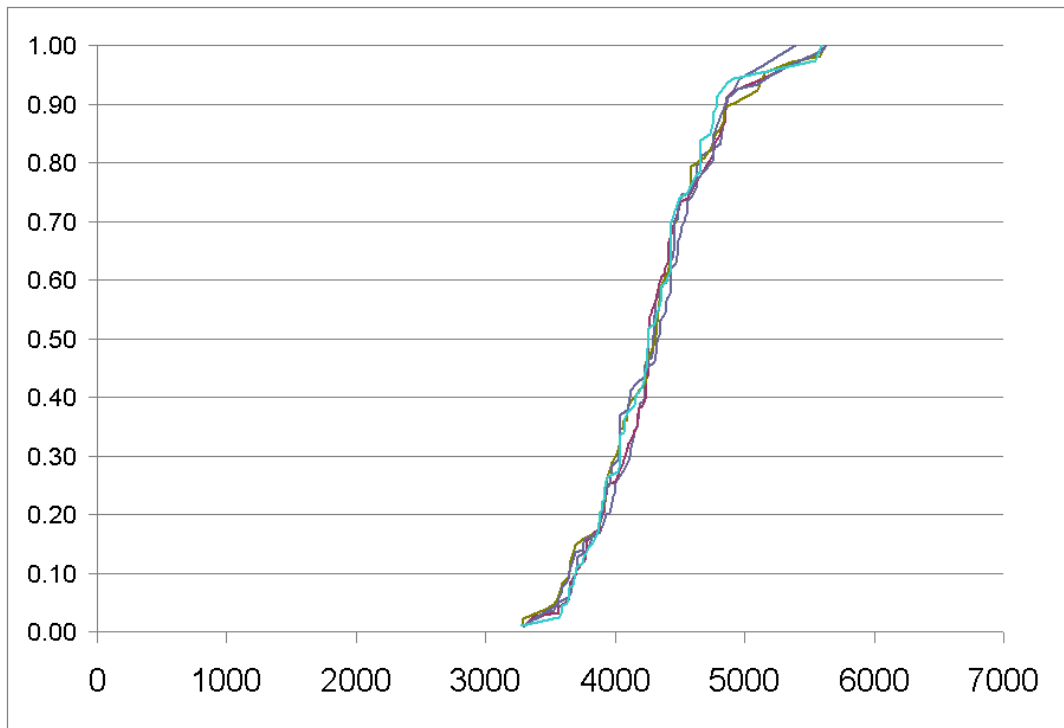
(b) Sul

Figura 5.11: ENAs: Distribuição marginal condicionada para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



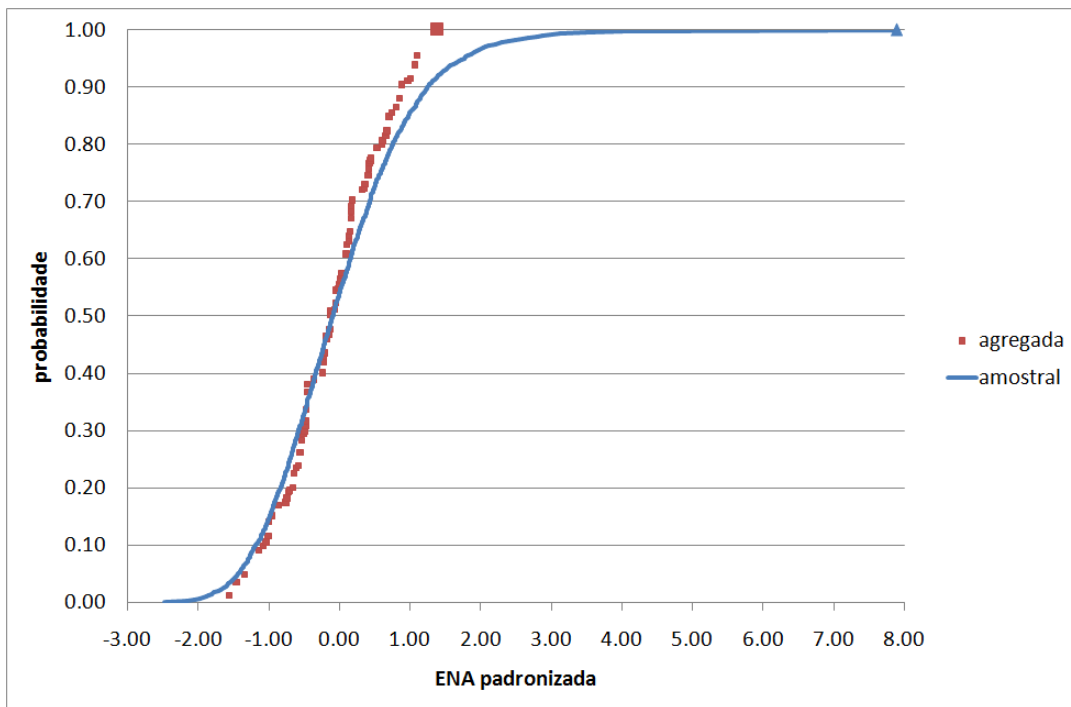
(c) Nordeste



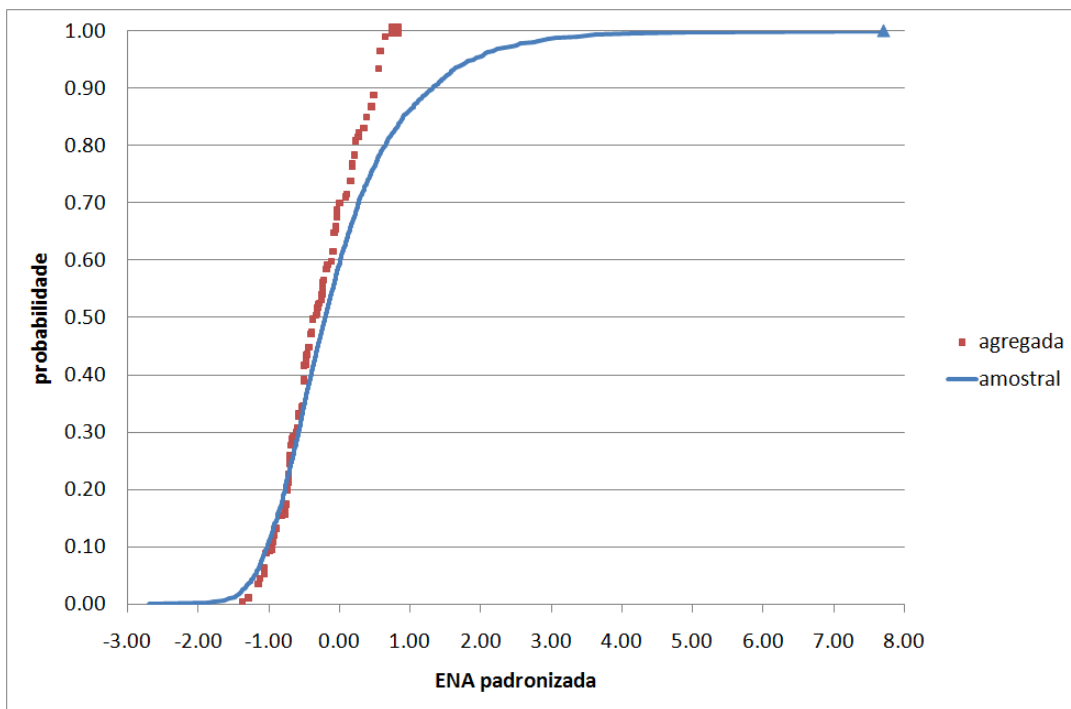
(d) Norte

Figura 5.11: ENAs: Distribuição marginal condicionada para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva (2/2).

[Fonte: elaboração própria]



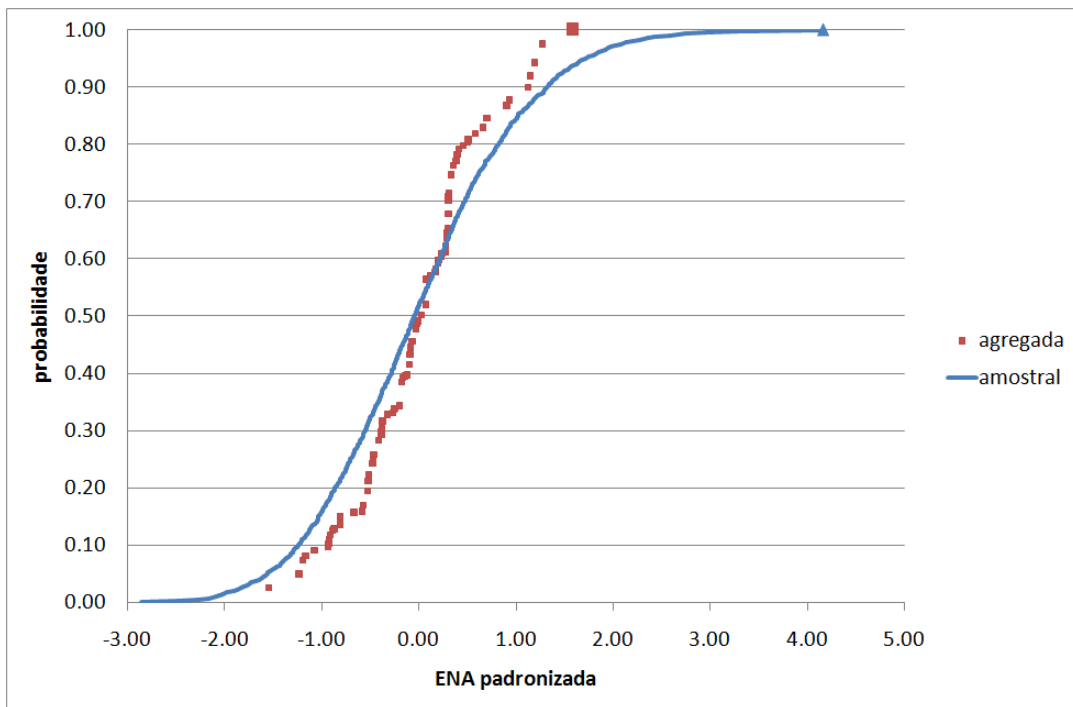
(a) Sudeste



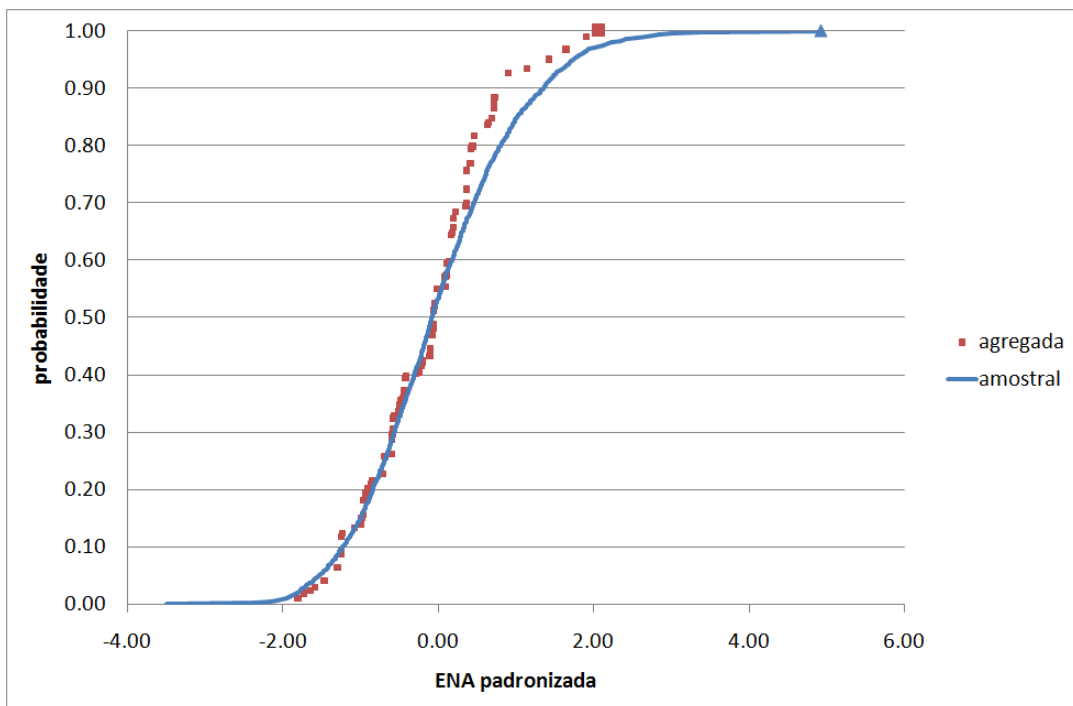
(b) Sul

Figura 5.12: ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva (1/2). [Fonte: elaboração própria]





(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 5.12: ENAs padronizadas: Distribuição marginal condicionada para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva (2/2). [Fonte: elaboração própria]

A Figura 5.13, página 89, apresenta o efeito da agregação em termos das médias e desvios-padrão condicionados das vazões incrementais agregadas para os postos principais, em relação aos valores teóricos de cada posto (em p.u.). Pode-se notar que há uma boa aderência entre os valores gerados e os teóricos para a média: os valores obtidos estão todos muito próximos de um (o valor médio entre todos os postos é 0,982, com desvio padrão 0,048). Já para os desvios padrão o intervalo de variação está entre 1,14 e 0,65, (média de 0,889 e desvio padrão 0,110) indicando uma seleção de cenários com menor variabilidade do que a encontrada no histórico, principalmente para os postos pertencentes ao subsistema Sul. Esta redução no desvio padrão reflete-se na distribuição marginal condicionada das ENAs deste subsistema. Ressalte-se que o método de redução recursiva não tem como requisito preservar momentos.

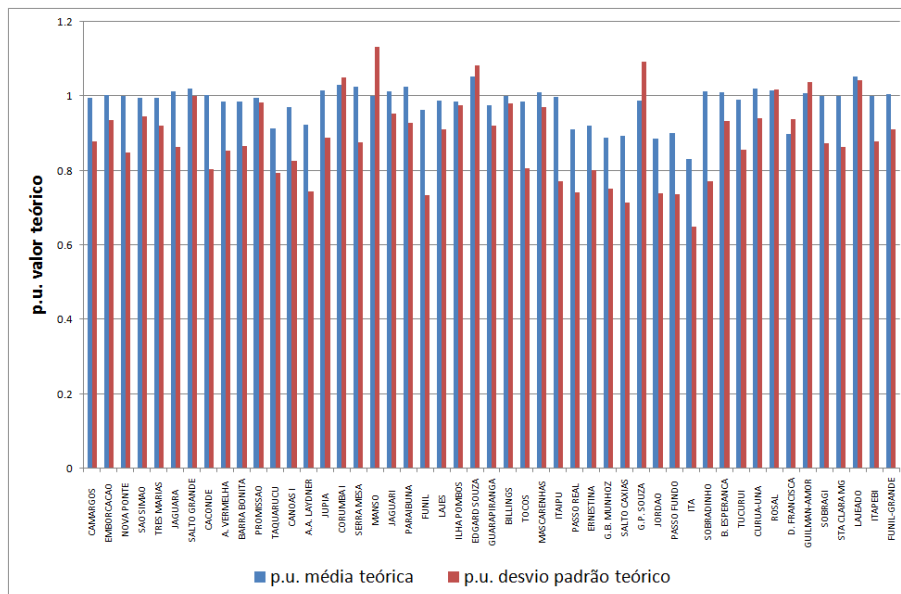


Figura 5.13: Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva [Fonte: elaboração própria]

A Figura 5.14, página 90, apresenta, para dez amostras iid de tamanho 4000 geradas a partir de diferentes sementes, o recobrimento das classes A, M, B. Nota-se que, para todos os dez casos considerados, cerca 46% das classes são vazias, Figura 5.15, página 91.

O recobrimento das células não se torna mais completo com o aumento da amo-



Figura 5.14: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva considerando dez amostras iid de tamanho 4000

[Fonte: elaboração própria]

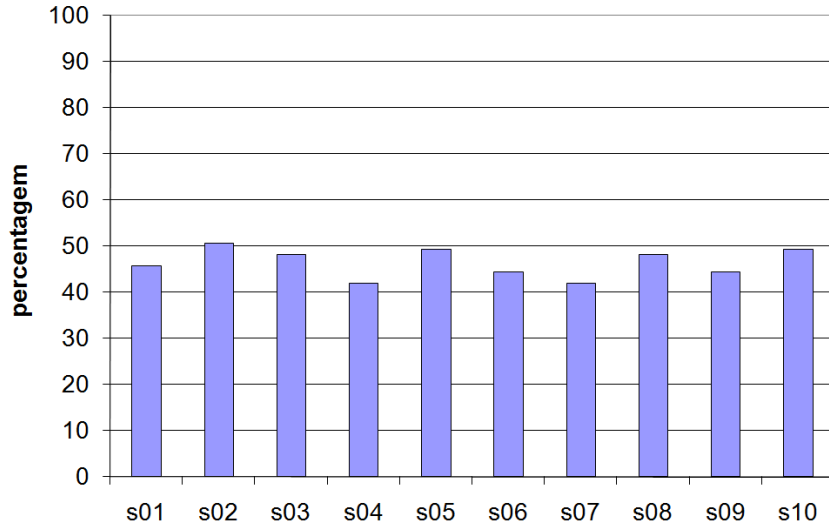


Figura 5.15: Percentagem de classes  $(A, M, B)^4$  com falhas, método redução recursiva

[Fonte: elaboração própria]

tra  $\text{iid}$  considerada, como mostra a Figura 5.16, página 92. Este padrão se repete para todos os demais meses analisados. Portanto, assim como no processo de seleção de representantes por  $k$ -Means, a seleção de representantes por meio da técnica de redução recursiva também não garante que exista um representante em cada uma das possíveis células.

### 5.3.3 Reticulado

A Figura 5.17, páginas 93 e 94, apresenta a distribuição condicionada das energias naturais afluentes para os quatro subsistemas, considerando amostras  $\text{iid}$  de tamanho 3000, ..., 10000 e as respectivas distribuições de probabilidades condicionadas dos 81 representantes, correspondentes à todas as combinações das classes  $A, M, B$ . Estas classes são definidas a partir da divisão do eixo de energias naturais afluentes, de amplitude  $\Delta = (\text{ENA máxima} - \text{ENA mínima})$  calculada a partir da amostra  $\text{iid}$ , em intervalos  $[0, 00, 0, 25)\Delta$ , correspondente à classe B;  $[0, 25, 0, 75)\Delta$  correspondente à classe M; e  $[0, 75, 1, 00]\Delta$ , correspondente à classe A. Para amostras com 1000 e 2000 valores  $\text{iid}$ , não foi possível encontrar um representante para todas as classes, o que indica que é necessário considerar cenários  $\text{iid}$  com pelo me-

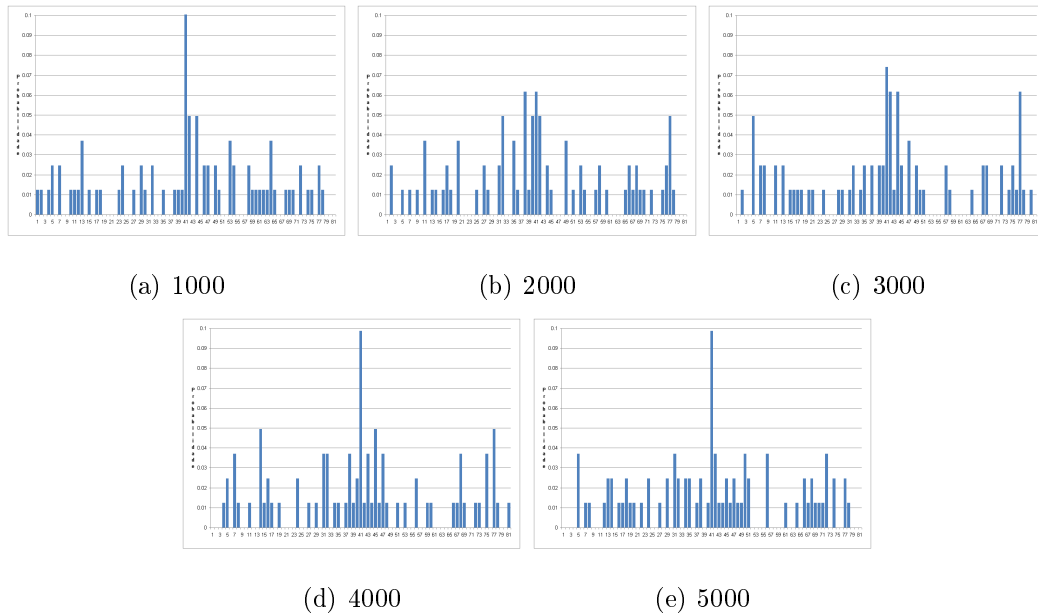
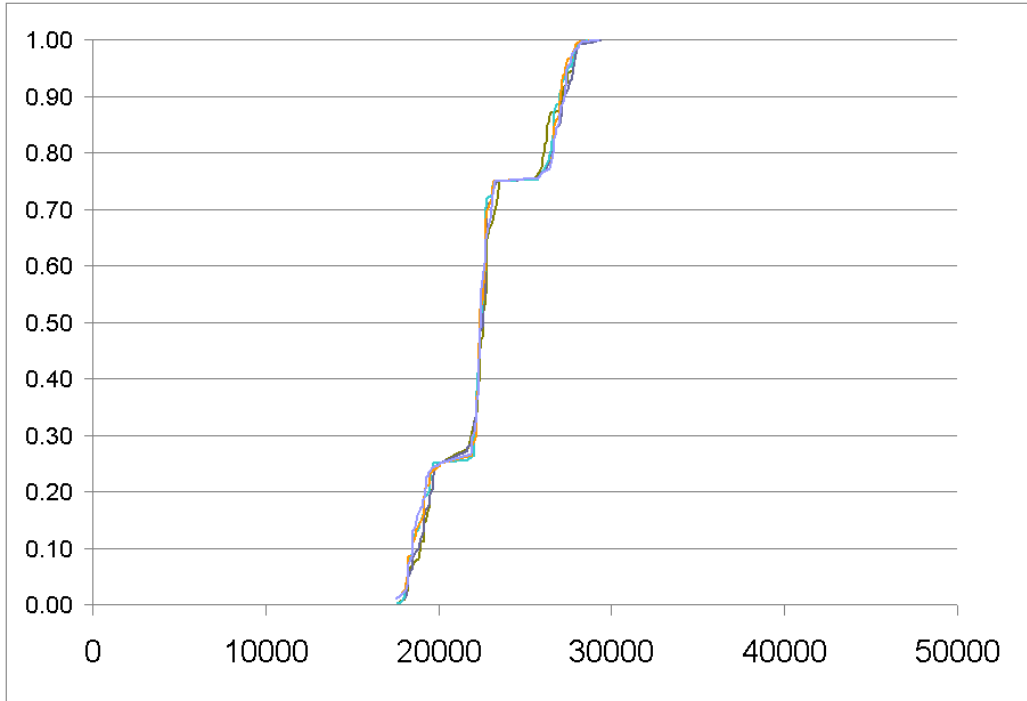


Figura 5.16: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos por redução recursiva considerando amostras iid de tamanhos diferentes  
 [Fonte: elaboração própria]

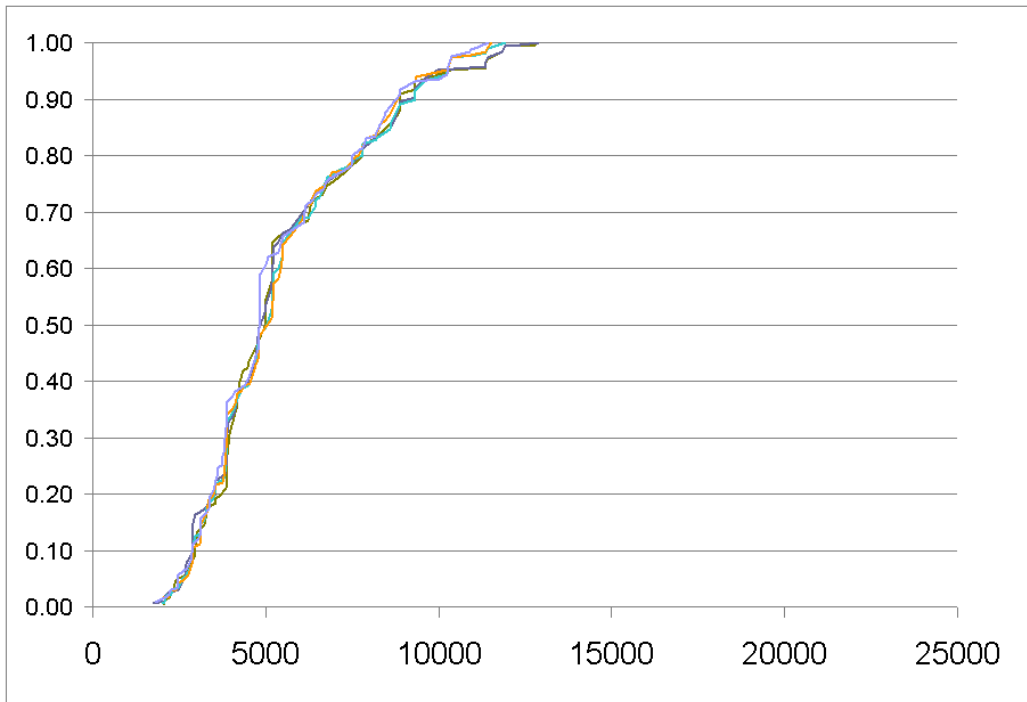
nos 3000 valores de forma a recobrir o espaço amostral. Observa-se que não ocorrem valores extremos em qualquer das classes, o que comprova a propriedade de que a amostragem estratificada proposta é pouco sensível a cenários extremos, como se espera para estatísticas de ordem. O maior valor de energia natural afluyente para o representante do subsistema Sul é de 13 022 MWmed, cerca de 2,20 da MLT.

A Figura 5.18, páginas 95 e 96, compara a distribuição marginal amostral condicionada das energias afluentes padronizadas obtida a partir de uma amostra iid de tamanho 4000 com a correspondente distribuição das 81 energias padronizadas agregadas pelo método reticulado. Esta figura mostra que o ajuste entre estas distribuições condicionadas é adequado e percebe-se que os elementos extremos gerados são mapeados em representantes menos afastados dos valores médios (os valores extremos máximos estão destacados). A Tabela 5.3, página 81, que apresenta os valores extremos amostrais e dos representantes selecionados, complementa a informação destes gráficos.

A Figura 5.19, página 97, apresenta o efeito da agregação em termos das médias



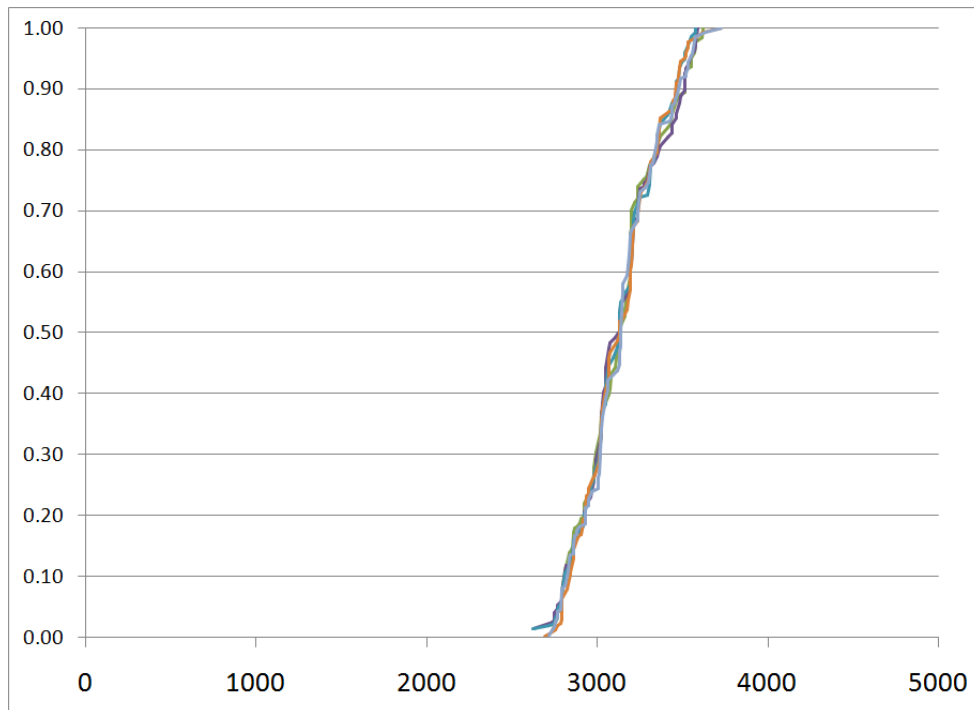
(a) Sudeste



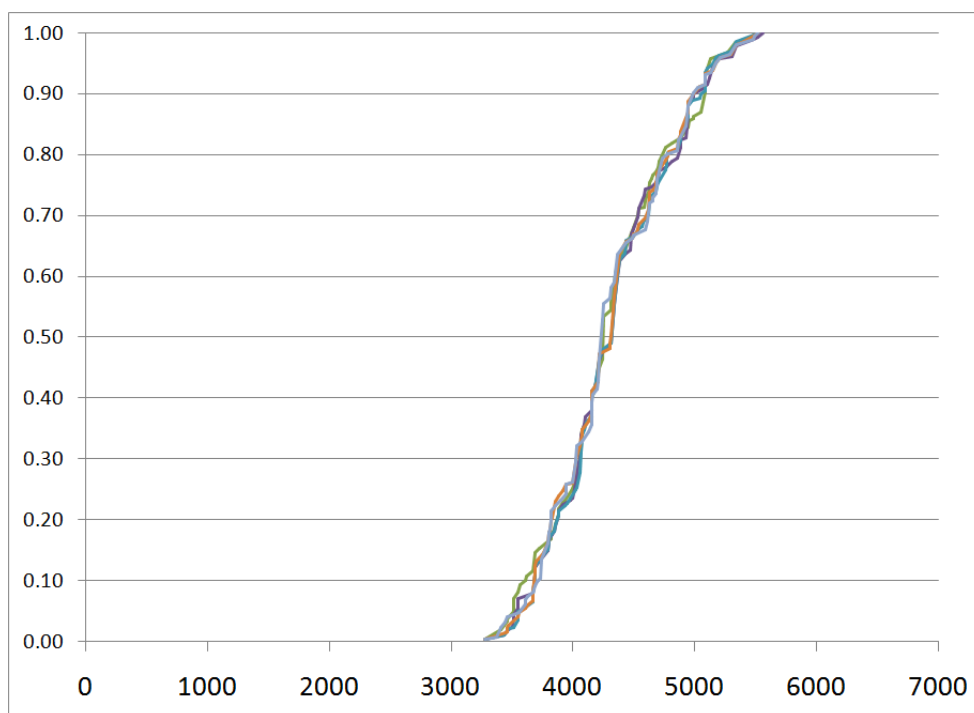
(b) Sul

Figura 5.17: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



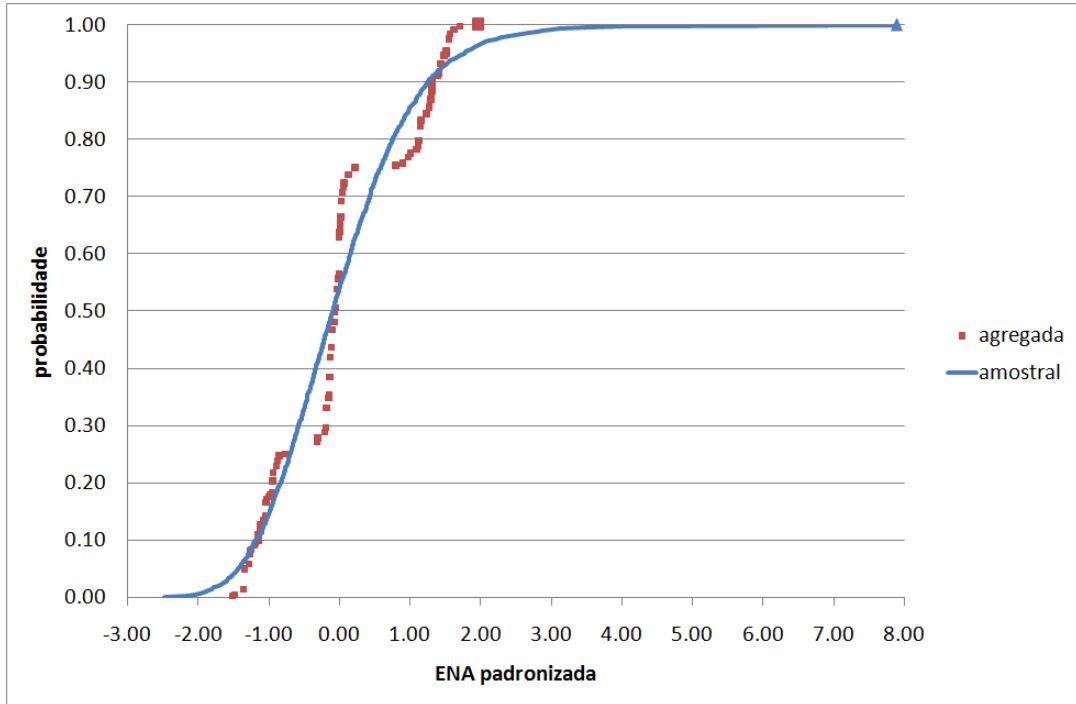
(c) Nordeste



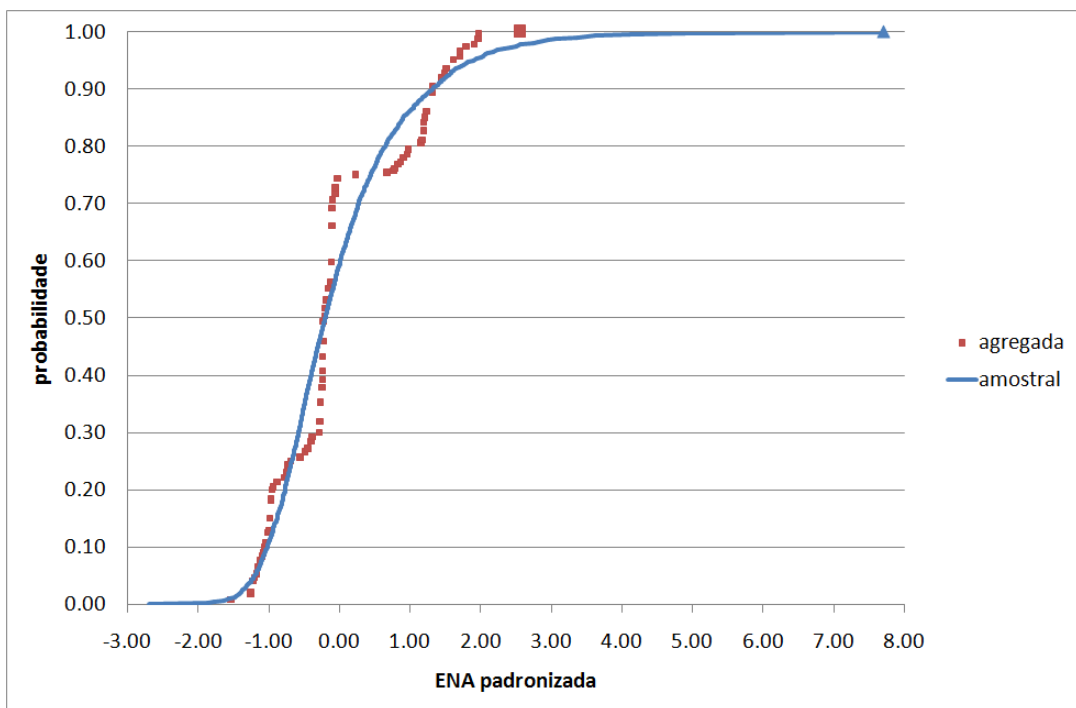
(d) Norte

Figura 5.17: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado (2/2).

[Fonte: elaboração própria]



(a) Sudeste

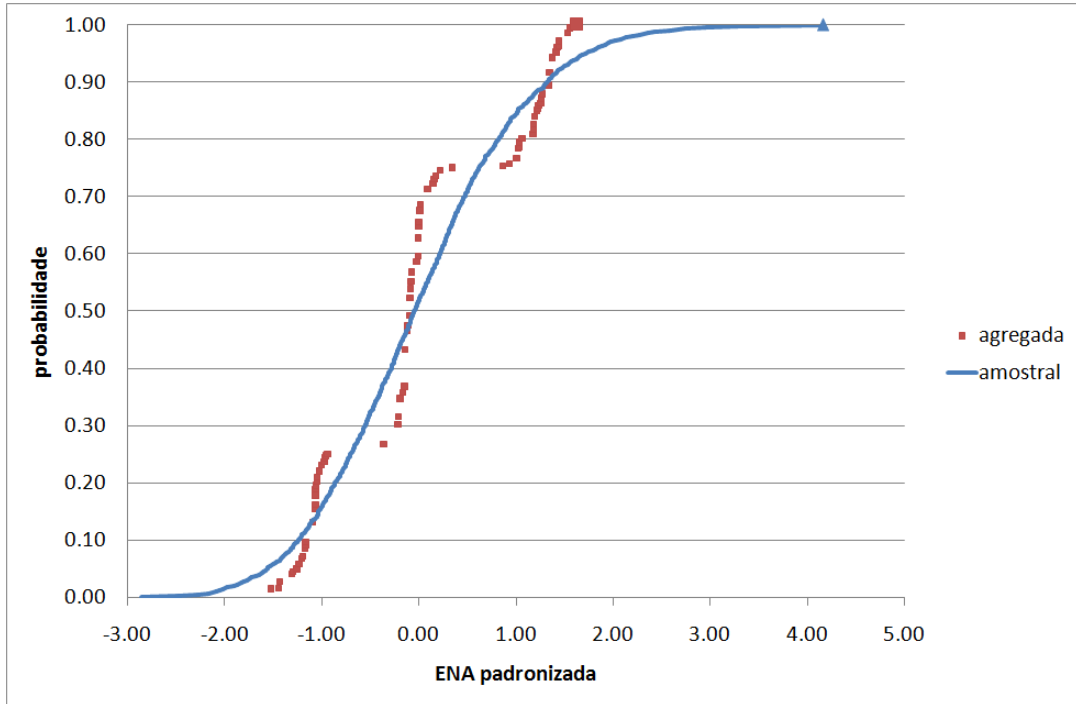


(b) Sul

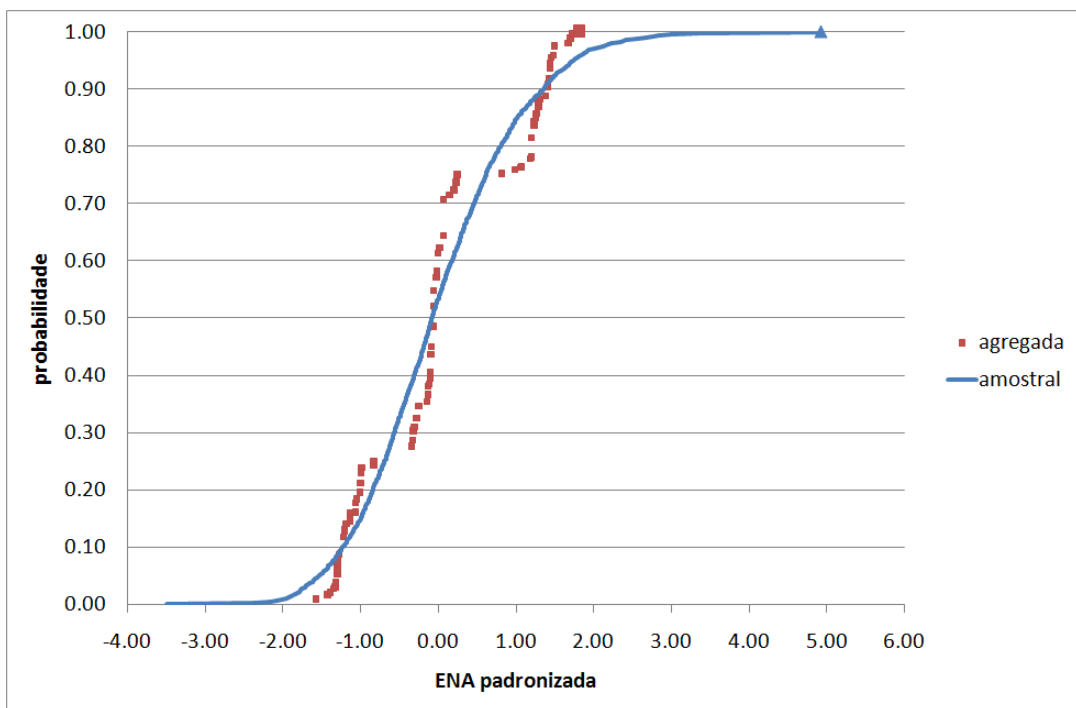
Figura 5.18: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado (1/2)

[Fonte: elaboração própria]





(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 5.18: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado (2/2)

[Fonte: elaboração própria]

e desvios-padrão condicionados das vazões incrementais obtidas a partir do método reticulado para os postos principais, em relação às médias teóricas de cada posto (em p.u.). Pode-se notar que há uma boa aderência entre os valores gerados e os teóricos: para a média os valores obtidos estão todos muito próximos de um (o valor médio entre todos os postos é 1,011, com desvio padrão 0,022), e para os desvios padrão o intervalo de variação está limitado, para a maioria dos postos, a  $\pm 0,2$  (média de 0,955 e desvio padrão 0,090), embora o valor mínimo seja cerca de 0,70, para o posto de Jupia.

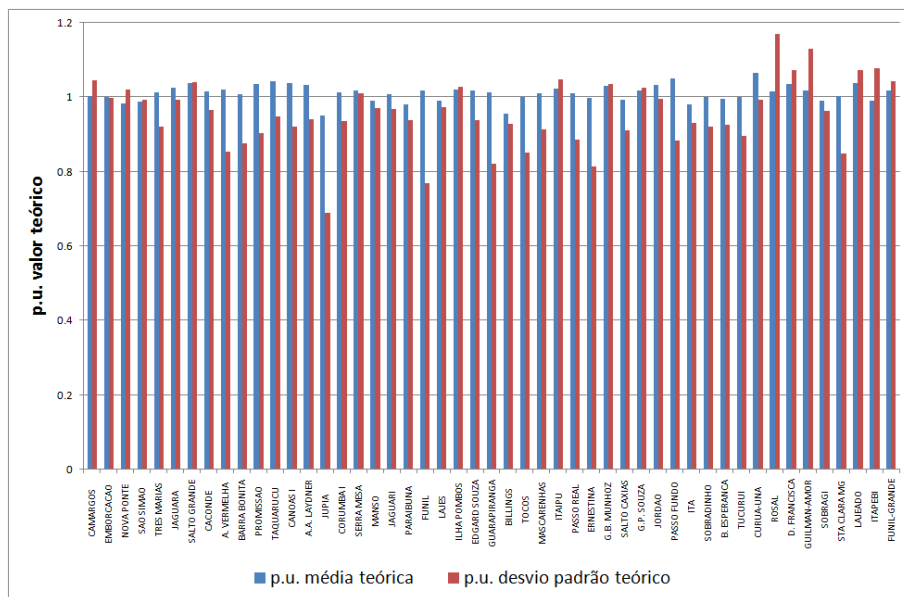


Figura 5.19: Valores amostrais de média e desvio-padrão condicionados (p.u.) para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por reticulado [Fonte: elaboração própria]

A Figura 5.20, página 98, apresenta, para dez amostras iid de tamanho 4000 geradas a partir de diferentes sementes, as probabilidades dos representantes associados à cada uma das classes A, M, B. Nota-se que, para todos os dez casos considerados, as probabilidades são muito semelhantes, sendo a de maior probabilidade a classe MMMM, que corresponde ao valor esperado condicionado, como é intuitivo. Naturalmente, por construção não pode existir falha nestes gráficos. Pode-se observar a grande semelhança na forma da distribuição das probabilidades obtidas pelo método reticulado com aqueles obtidos com o método de redução via componentes principais dos representantes ao longo do eixo x, embora os valores das

probabilidades para cada representante sejam diferentes, pois resultam de métodos que utilizam procedimentos de redução/agregação diferentes.

As probabilidades das células associadas às classes não se alteram significativamente com o aumento da amostra iid considerada, como mostra a Figura 5.21, página 99. Este padrão se repete para todos os demais meses analisados. Portanto, o processo de seleção de representantes por meio da técnica de amostragem

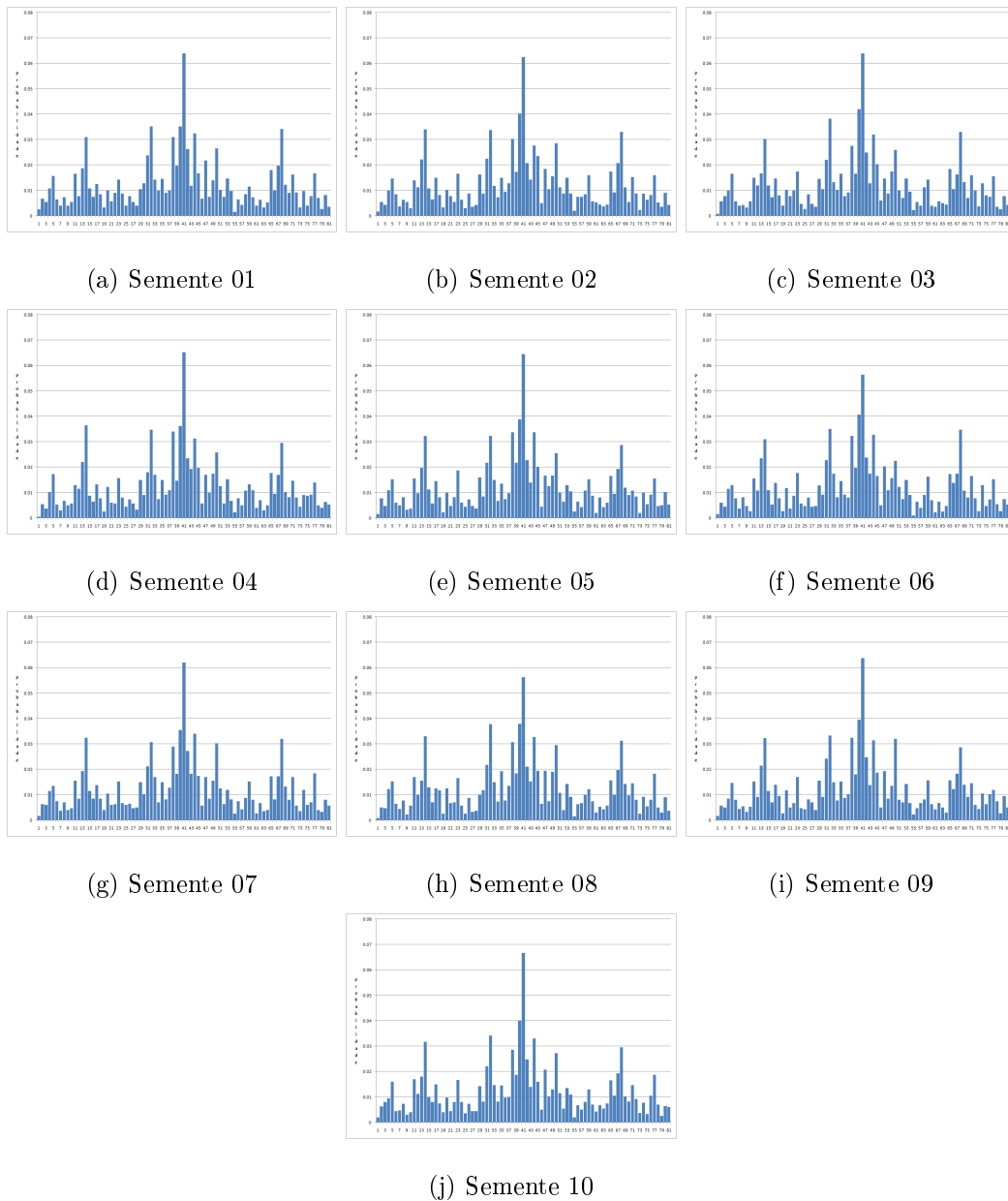


Figura 5.20: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado considerando sementes diferentes [Fonte: elaboração própria]

estratificada é bastante estável. O principal requisito é que o tamanho da amostra *iid* seja suficiente para garantir que haja algum elemento em cada uma das classes. Como este método apresenta grande eficiência computacional – os tempos de processamento variaram entre 17 segundos para amostras de 3000 até 1 minuto e 40 segundos para amostras de 10000 – este requisito não causa impacto no esforço computacional necessário para a escolha do representante.

### 5.3.4 Componentes principais

O método de discretização usando componentes principais está ilustrado para o caso de agosto de 2003. O estudo foi feito para o primeiro estágio estocástico, considerando quatro componentes principais discretizadas em três valores cada um. A probabilidade do ponto central foi escolhida igual a  $\tau = 0,68268$ , correspondente à área da normal padrão entre menos e mais um desvio padrão, resultando que  $\theta = 0,159$  é a probabilidade dos pontos simétricos extremos, distantes do ponto central de  $\alpha = 1,7752$ .

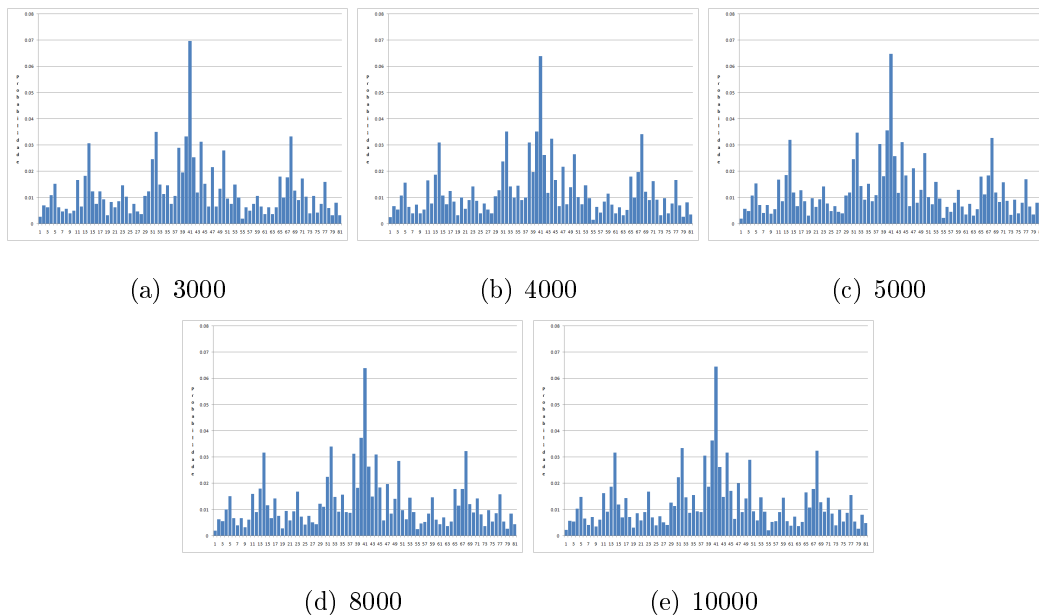


Figura 5.21: Recobrimento do reticulado  $(A, M, B)^4$ . Representantes para maio de 2003 obtidos pelo método reticulado considerando amostras *iid* de tamanhos diferentes  
[Fonte: elaboração própria]

A Figura 5.22, página 100 apresenta os 81 ruídos correlatados para cada um dos 49 postos principais para o primeiro estágio estocástico, usando cores para diferenciar os valores. Nesta Figura, a numeração crescente das 81 células do eixo x foi feita correspondendo às células BBBB, BBBM, ..., AAAA. Cada componente assume sucessivamente valores B, M e A com probabilidades  $\theta$ ,  $\tau$  e  $\theta$ . Pode-se notar uma distribuição razoavelmente uniforme de cores das usinas para cada célula, e um espalhamento de cores bastante simétrico à esquerda e à direita da célula central MMMM. Devido à estrutura de dependência entre os ruídos discretizados introduzida pela matriz de carga, os valores se diferenciam de usina para usina.

Cabe salientar que, no caso do método de discretização, a única comparação possível é entre os valores populacionais dos momentos e aqueles resultantes da discretização. Como as médias e variâncias condicionadas são preservadas por construção, apenas as correlações cruzadas dos ruídos no domínio normal são comparadas.

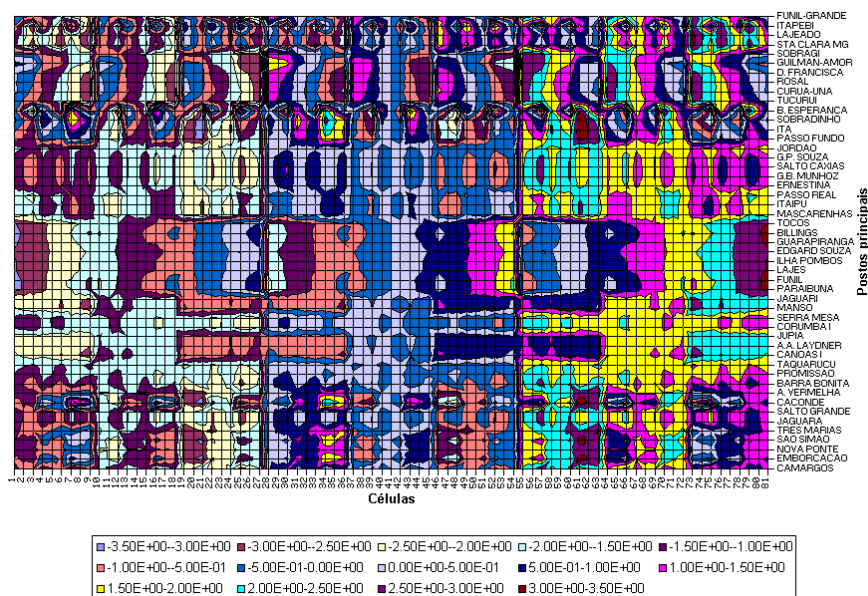


Figura 5.22: Ruídos correlatados dos postos principais para as 81 células da discretização

[Fonte: elaboração própria, baseado em (OLIVEIRA; COSTA, 2005)]

A metodologia proposta para geração de cenários preserva, por construção, as médias e variâncias condicionadas das afluições. Entretanto, como mencionado em 4.2.2, considerar apenas os maiores componentes principais e re-normalizar a matriz de correlação pode afetar a estrutura de correlação espacial. Para avaliar este efeito,

mostra-se na Figura 5.23 a diferença absoluta entre os valores de correlação espacial históricos e aqueles obtidos ao se utilizar apenas os quatro primeiros (maiores) componentes principais. Pode-se observar que, na grande maioria dos casos a aderência das correlações cruzadas em relação aos valores teóricos é plenamente satisfatória. Apenas 22% das correlações cruzadas apresentam diferenças absolutas acima de 0,1; 4% acima de 0,2; e 0,3% acima de 0,4; o que indica que a consideração de quatro componentes principais é suficiente para retratar a dependência espacial entre os cenários de vazão selecionados.

A estrutura de dependência espacial é constante ao longo dos nós da árvore, visto que independe da condição inicial. A título de ilustração, a Figura 5.24, página 102, apresenta para cada posto principal os valores de ruídos nas células BBBB e AAAA. Pode-se notar que a matriz de carga afeta as células diferentemente para cada posto, embora o valor do ruído *independente* seja sempre igual a  $-1,7752$  para a célula BBBB e sempre igual a  $+1,7752$  para a célula AAAA.

A Figura 5.25, página 103, ilustra a distribuição discreta dos ruídos padronizados para usinas nos quatro subsistemas, na qual o eixo vertical direito corresponde a uma escala de probabilidades (linha cheia) das células, ordenadas da mesma forma e o eixo vertical esquerdo corresponde ao nível do ruído padronizado para o posto referente à usina. Pode-se notar que a célula MMMM, com todos componentes principais nulos (ponto central dos gráficos), é a de maior probabilidade ( $\tau^4$ ), seguida das células xMMM, MxMM, MMxM e MMMx, onde  $x = \{A, B\}$ , com mesma probabilidade igual a  $\theta\tau^3$ , seguidas das células MMxx, MxMx, xMxM, xxMM e MxxM, com mesma probabilidade igual a  $\theta^2\tau^2$ , tendo as demais células a mesma probabilidade  $\theta^3\tau$ . Cabe ressaltar que estas probabilidades são sempre as mesmas para todos os postos, pois são resultantes da discretização dos eixos das componentes principais. Por sua vez, o padrão de distribuição dos ruídos varia ao longo das regiões, refletindo as diferentes correlações espaciais entre os postos de vazão. Por exemplo, para a usina de Edgar de Souza, situada no Sudeste, observamos um padrão anti-simétrico em relação à usina de Tucuruí, situada na região Norte.

Por último, além de atender ao critério de parcimônia na dimensão da árvore e de capturar as médias e covariâncias das vazões condicionadas, esta abordagem

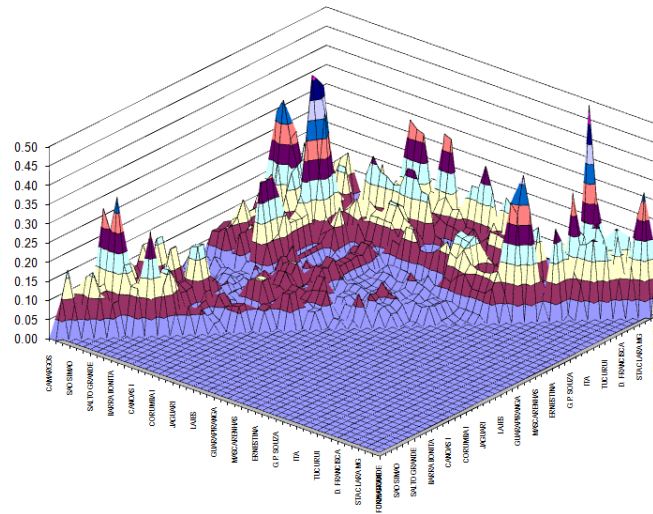


Figura 5.23: Diferenças absolutas entre correlações cruzadas: históricas  $\times$  4 componentes principais

[Fonte: elaboração própria, baseado em (COSTA; OLIVEIRA; LEGEY, 2006)]

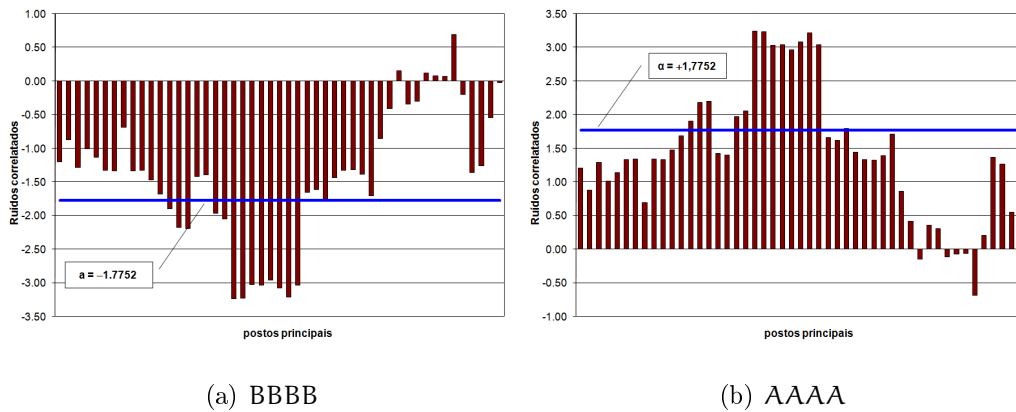
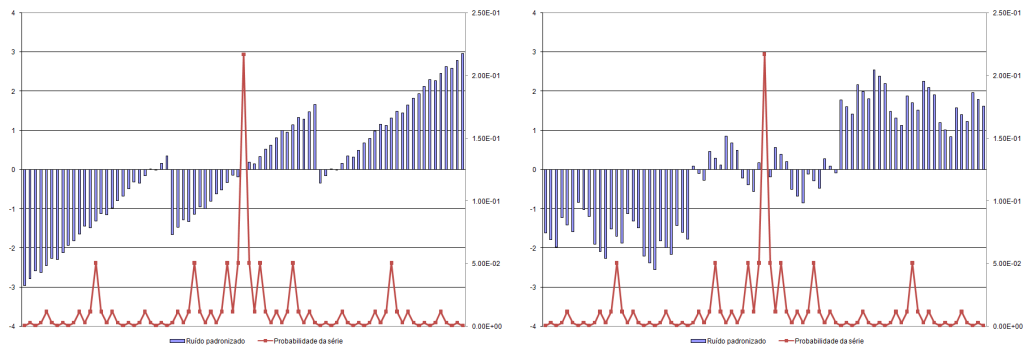
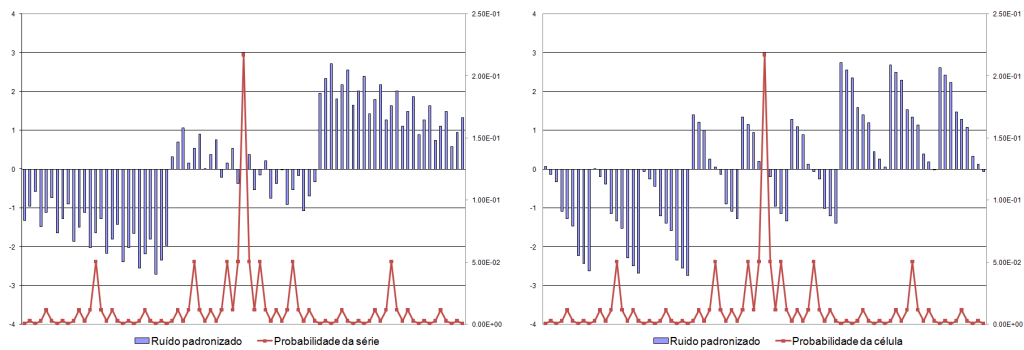


Figura 5.24: Valores de ruídos correlatados para as células BBBB e AAAA  
 [Fonte: elaboração própria, baseado em (COSTA; OLIVEIRA; LEGEY, 2006)]



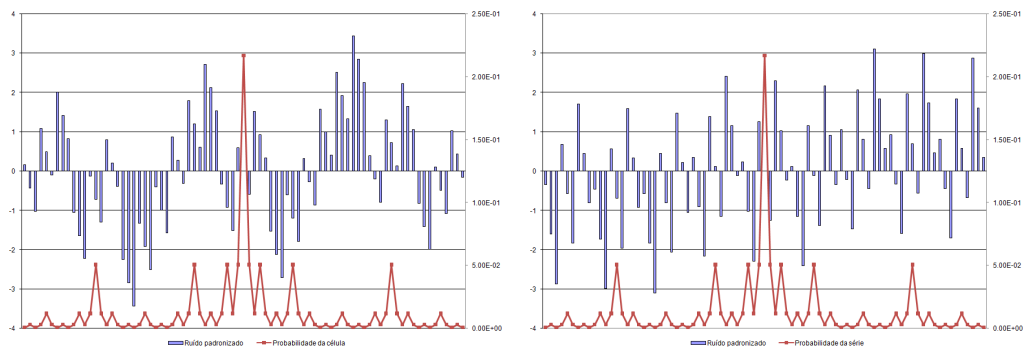
(a) Edgar de Souza

(b) Itaipu



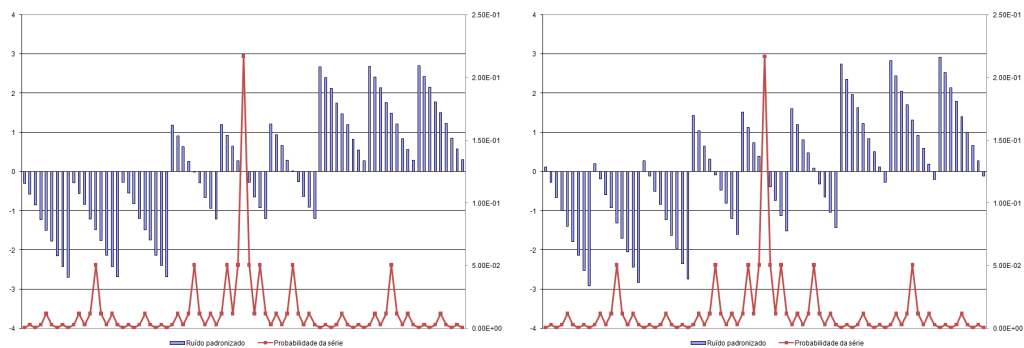
(c) Salto Caxias

(d) Dona Francisca



(e) Sobradinho

(f) Boa Esperança



(g) Tucuruí

(h) Curuá Una

Figura 5.25: Distribuição dos ruídos padronizados para usinas do SIN

[Fonte: elaboração própria, baseado em (COSTA; OLIVEIRA; LE-GEY, 2006)]

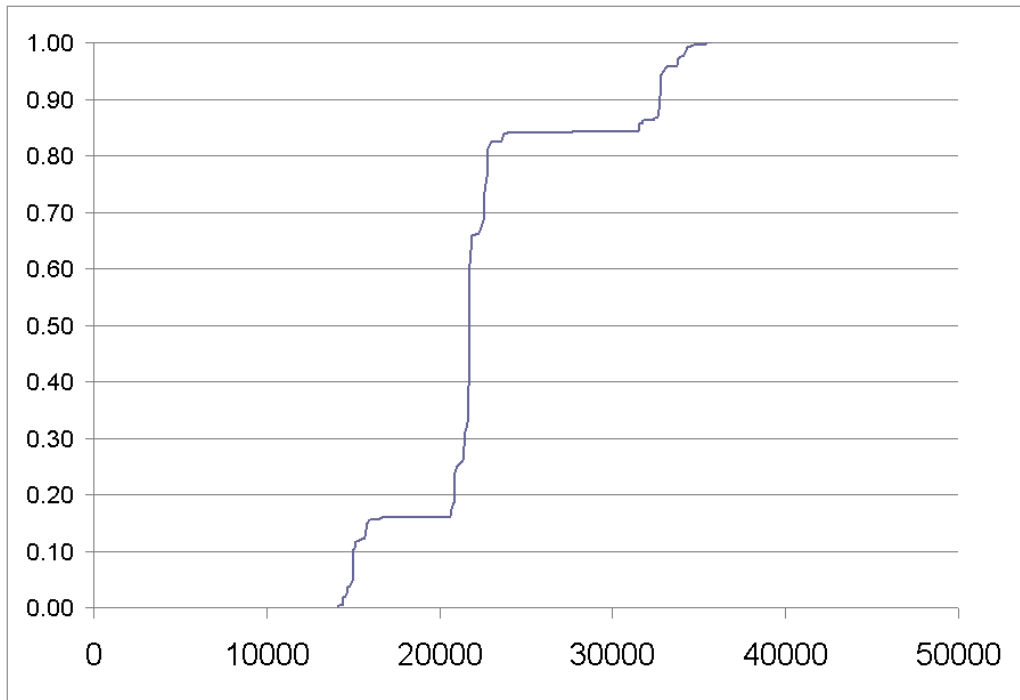


apresenta uma vantagem adicional: nenhum cenário apresenta vazões extremas, visto que em cada componente principal toda a densidade de probabilidade menor e maior que um desvio padrão foi mapeada nos pontos  $-\alpha$  e  $\alpha$ , respectivamente.

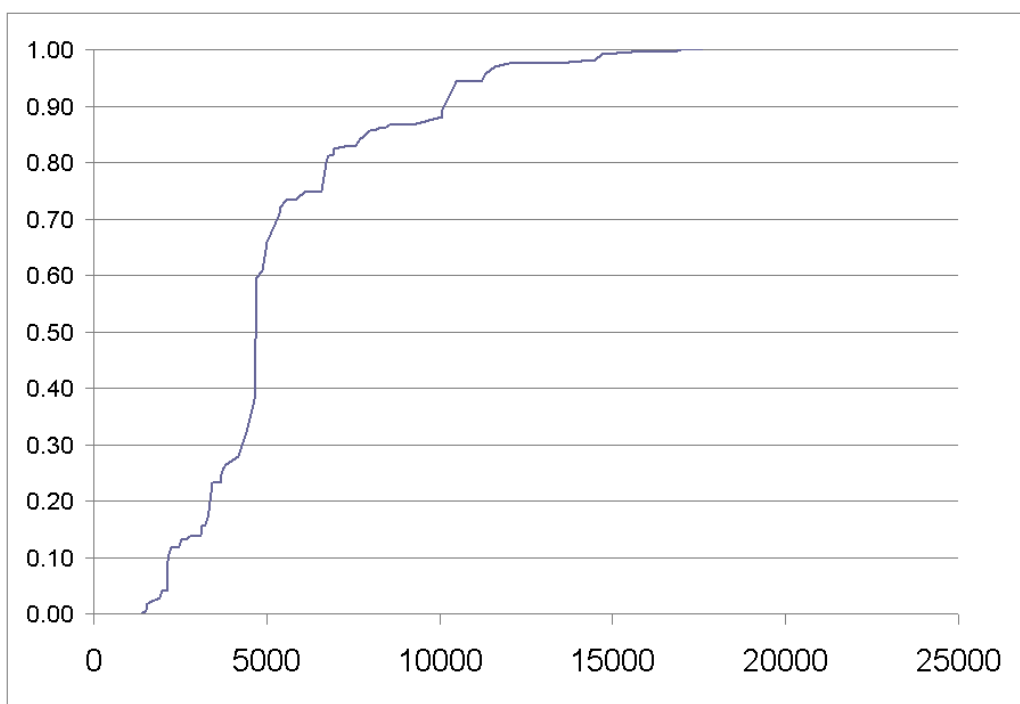
A Figura 5.26, páginas 105 e 106, apresenta a forma das distribuições marginais dos representantes das energias naturais afluentes a cada um dos subsistemas para  $\theta = 0,68268$ . Pode-se observar que não ocorrem valores extremos, sendo o maior valor para o representante do subsistema Sul igual a 17 575 MWmed, cerca de 2,97 vezes a média histórica para o mês de maio. Para o caso de seleção de cenários pelo método de componentes principais, como não há amostra iid a partir da qual os cenários representantes são selecionados, não cabe comparar a adequação da distribuição dos representantes à distribuição empírica.

A Figura 5.28, páginas 107 e 108, compara a distribuição marginal amostral condicionada das energias afluentes padronizadas obtida a partir de uma amostra iid de tamanho 4000 com a correspondente distribuição das 81 energias padronizadas agregadas pelo método das componentes principais. Esta figura mostra que o ajuste entre estas distribuições condicionadas é adequado e percebe-se que os elementos extremos gerados são mapeados em representantes menos afastados dos valores médios (os valores extremos máximos estão destacados). A Tabela 5.3, página 81, que apresenta os valores extremos amostrais e dos representantes selecionados, complementa a informação destes gráficos.

Considerarmos o espaço das energias naturais afluentes subdividido em 81 classes, a Figura 5.29, página 109, mostra que a proporção de classes A, M, B sem representantes é da ordem de 75%, para probabilidades  $\tau$  da classe central variando entre 0,6304 e 0,7348. Note que este método não tem compromisso com o preenchimento do espaço das ENAs; no que diz respeito ao recobrimento do espaço dos ruídos os gráficos da Figura 5.25, página 103, mostram o perfeito atendimento.



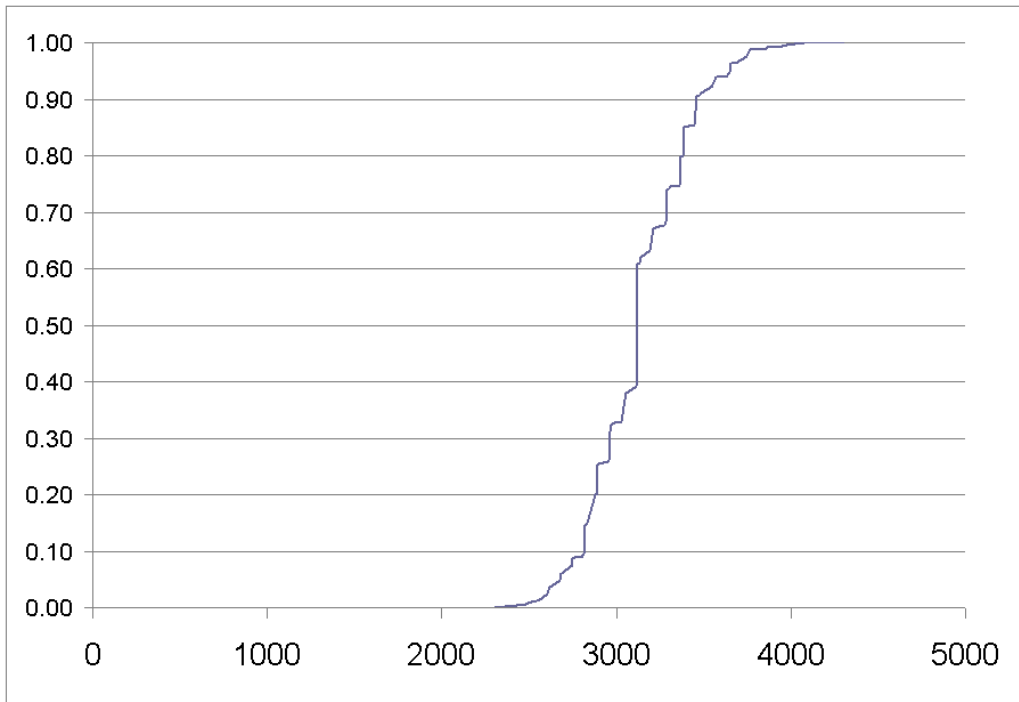
(a) Sudeste



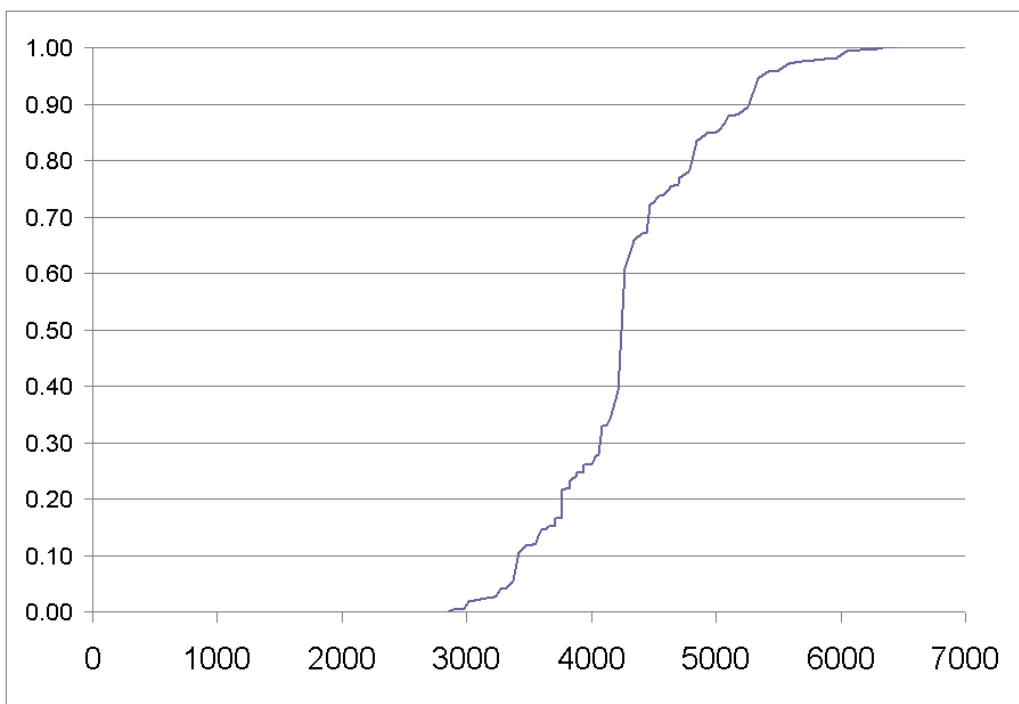
(b) Sul

Figura 5.26: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por componentes principais (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



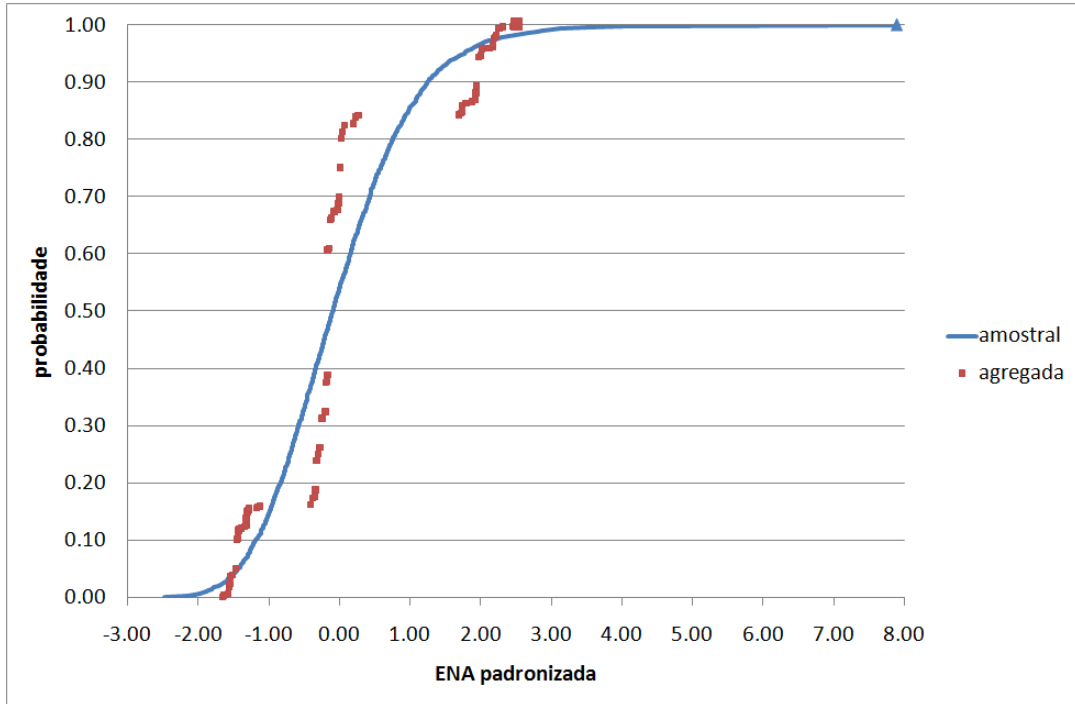
(a) Nordeste



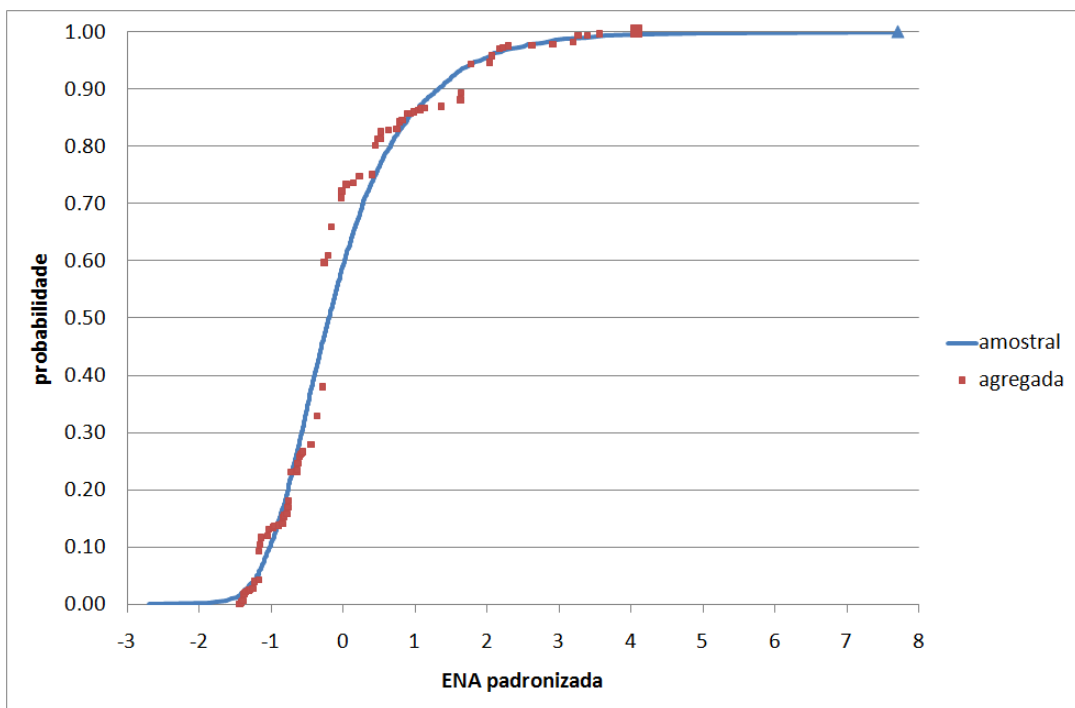
(b) Norte

Figura 5.27: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes para 81 representantes para maio de 2003 obtidos por componentes principais (2/2).

[Fonte: elaboração própria]



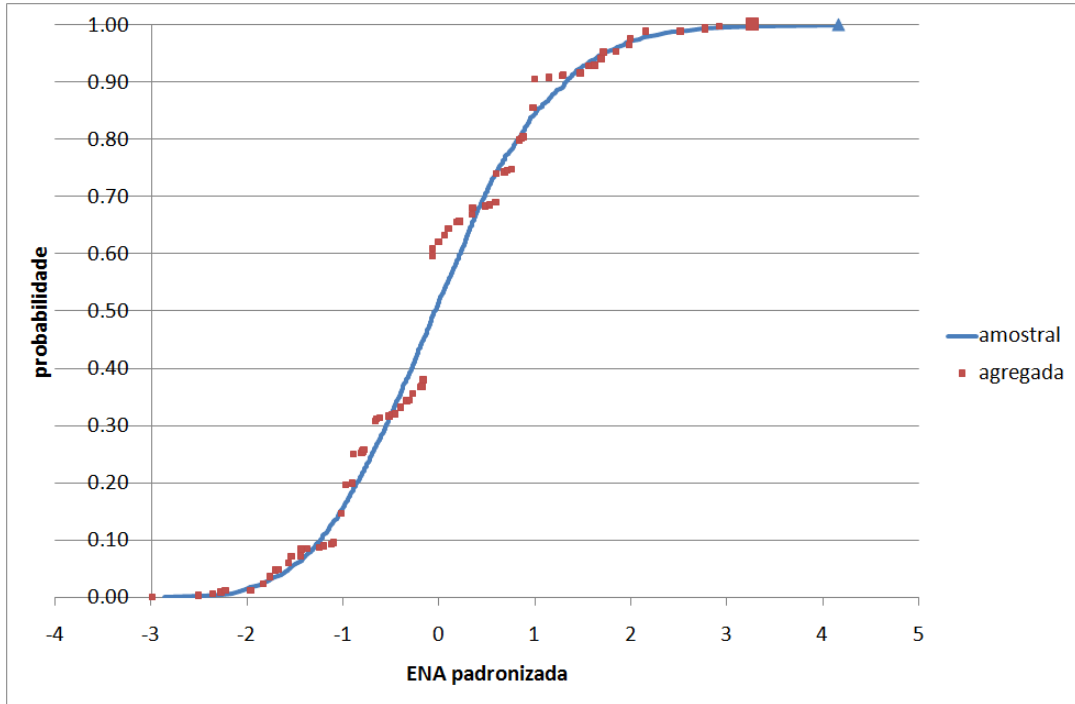
(a) Sudeste



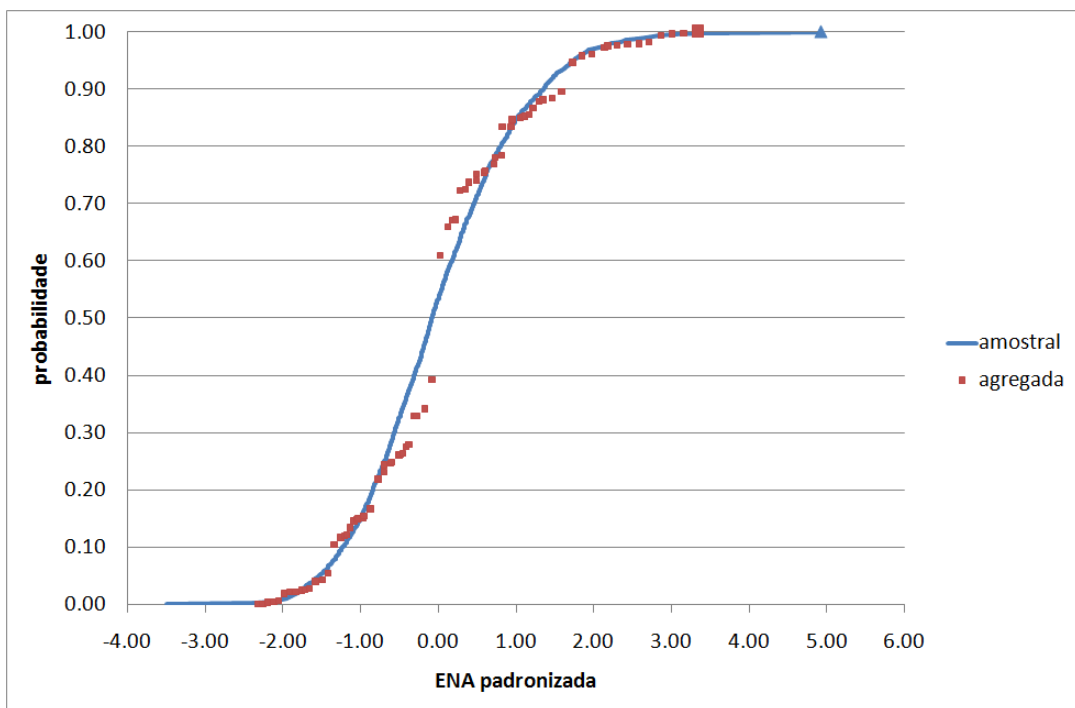
(b) Sul

Figura 5.28: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método componentes principais (1/2).

[Fonte: elaboração própria]



(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 5.28: Distribuição marginal condicionada das energias naturais afluentes padronizadas para 81 representantes para maio de 2003 obtidos pelo método componentes principais (2/2).

[Fonte: elaboração própria]

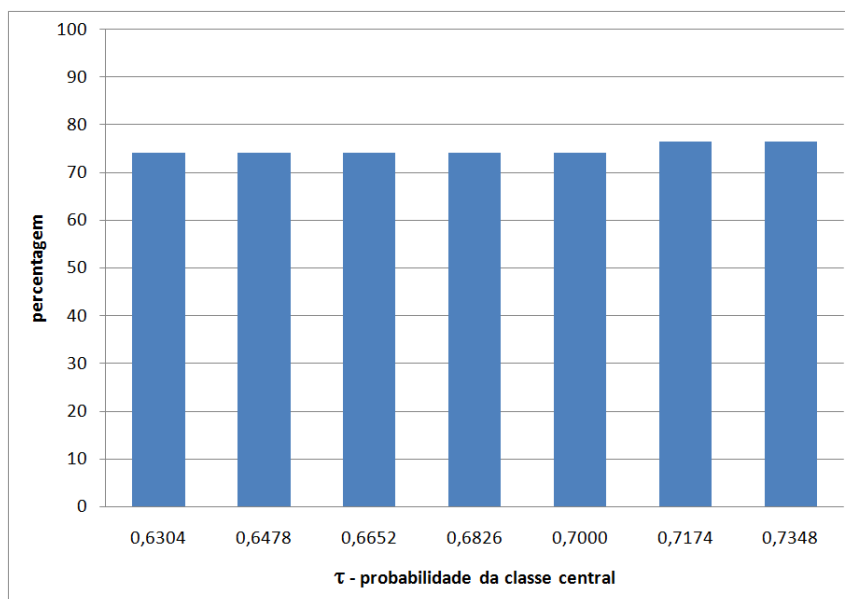


Figura 5.29: Percentagem de classes (A, M, B)<sup>4</sup> com falhas, método componentes principais

[Fonte: elaboração própria]

## 5.4 Estabilidade da política com respeito à estrutura da árvore

As subseções seguintes apresentam a análise do desempenho dos diferentes métodos de redução de cenários propostos no contexto de uso deles no problema de planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo.

### 5.4.1 Valor de referência

Como mencionado no item 4.3, não é possível resolver o problema de programação estocástica de forma exata, exceto para casos muito específicos. Desta forma, para avaliar o valor da solução obtida com a árvore de cenários proposta é necessário estimar um valor de referência, já que não se dispõe de uma solução analítica para o problema em foco. Nesta tese, esta referência foi estimada pelo valor médio da função objetivo da solução de dez problemas de planejamento da operação, considerando dois processos de agregação:

**k-Means** – 10 árvores reduzidas de 1000 cenários cada uma, obtidas a partir de

uma amostra iid de tamanho 10000.

**reticulado** – 10 árvores reduzidas de 625 cenários cada uma, obtidas a partir de amostras iid de tamanho 10000. Neste caso, cada um dos eixos de agregação (subsistemas) foi dividido em 5 intervalos:  $[0,00, 0,20)\Delta$ ;  $[0,20, 0,40)\Delta$ ;  $[0,40, 0,60)\Delta$ ;  $[0,60, 0,80)\Delta$  e  $[0,80, 1,00)\Delta$ , onde a amplitude  $\Delta = (\text{ENA máxima} - \text{ENA mínima})$  é calculada a partir da amostra iid. Estas classes podem ser qualitativamente associados às ocorrências “muito baixas”, “baixas”, “médias”, “altas” e “muito altas”.

A Tabela 5.4, página 110, apresenta os valores de referência médios obtidos, bem como os respectivos desvios padrão e valores extremos encontrados. Pode-se notar que os valores médios de cada um dos meses são bastante próximos quando calculados pelos dois métodos considerados: o coeficiente de variação médio é 0,0018, com o maior valor para fevereiro igual a 0,0080. Em vista disso, neste trabalho adota-se como referência a média entre os valores que resultam dos dois processos, conforme apresentado na última linha desta tabela.

| Caso               |               | fev 2003  | mai 2003  | ago 2003    | nov 2003    |
|--------------------|---------------|-----------|-----------|-------------|-------------|
| <i>k</i> -Means    | média         | 475 860,4 | 660 505,8 | 1 493 915,0 | 2 263 446,5 |
|                    | desvio padrão | 633,4     | 130,4     | 705,1       | 4 960,6     |
|                    | mínimo        | 475 341,7 | 660 413,6 | 1 492 950,2 | 2 259 938,8 |
|                    | máximo        | 476 974,6 | 660 598,0 | 1 494 935,0 | 2 266 954,1 |
| Reticulado         | média         | 480 839,0 | 660 180,1 | 1 493 139,0 | 2 258 862,2 |
|                    | desvio padrão | 3 850,5   | 125,9     | 466,3       | 4 476,9     |
|                    | mínimo        | 475 773,7 | 660 086,5 | 1 492 346,7 | 2 252 402,9 |
|                    | máximo        | 487 579,0 | 660 273,6 | 1 493 754,4 | 2 265 626,5 |
| Referência adotada |               | 478 349,7 | 660 343,0 | 1 493 527,0 | 2 261 154,4 |

Tabela 5.4: Valor de referência ( $10^3\$$ )

[Fonte: elaboração própria]

## 5.4.2 Resultados consolidados

A Tabela 5.5, página 112, sumaria os resultados encontrados nos estudos de avaliação da estabilidade. Os valores desta tabela estão todos padronizados pelos respectivos valores de referência definidos na seção 5.4.1. De uma maneira geral, os métodos reticulado e componentes principais são os que apresentam os menores desvios padrão para os valores encontrados, indicando maior estabilidade, como pode ser visto na Figura 5.30, página 113, na qual os valores de cada mês estão padronizados pelo respectivo valor de referência (vide Tabela 5.4, página 110). O método componentes principais, como proposto tem, inerentemente, pouca variabilidade. Entretanto, cabe observar que os resultados obtidos com a aplicação destes representantes no modelo de otimização apresentam boa aderência ao valor de referência estabelecido.

Por outro lado, o método recursão recursiva não apresenta bons resultados, apesar da justificativa teórica para sua utilização. Estudos adicionais, utilizando a implementação do método disponibilizada pelos próprios autores (referidos nesta tese como ScenRed), confirmam os resultados alcançados com a implementação feita no modelo BONSAI.

A seguir apresenta-se um detalhamento dos resultados que serviram de base para a elaboração desta tabela.

## 5.4.3 *k*-Means

Este método pode apresentar problemas quando forem gerados elementos muito destacados dos demais componentes da amostra: estes elementos, possivelmente extremos, serão considerados na amostra reduzida e implicarão em resultados com maior variabilidade.

Ressalte-se que, para o método *k*-Means, as agregações partem de uma solução inicial obtida pelo próprio algoritmo e a agregação final pode variar de acordo com estes pontos iniciais.



| Caso | Método          | média  | d. pad. | mínimo | máximo |
|------|-----------------|--------|---------|--------|--------|
| fev  | <i>k</i> -Means | 0,9926 | 0,0052  | 0,9802 | 1,0057 |
|      | Red. Recur      | 1,0094 | 0,0081  | 0,9921 | 1,0268 |
|      | Scen Red        | 0,9917 | 0,0064  | 0,9816 | 1,0028 |
|      | Reticulado      | 0,9914 | 0,0041  | 0,9841 | 1,0012 |
|      | Comp princ      | 0,9955 | 0,0026  | 0,9942 | 1,0012 |
| mai  | <i>k</i> -Means | 1,0086 | 0,0044  | 1,0004 | 1,0171 |
|      | Red. Recur      | 1,0070 | 0,0049  | 0,9984 | 1,0190 |
|      | Scen Red        | 1,0066 | 0,0069  | 0,9967 | 1,0235 |
|      | Reticulado      | 1,0000 | 0,0006  | 0,9985 | 1,0010 |
|      | Comp princ      | 1,0009 | 0,0004  | 1,0004 | 1,0015 |
| ago  | <i>k</i> -Means | 1,0119 | 0,0058  | 1,0011 | 1,0236 |
|      | Red. Recur      | 1,0109 | 0,0087  | 1,0015 | 1,0534 |
|      | Scen Red        | 1,0089 | 0,0068  | 0,9998 | 1,0264 |
|      | Reticulado      | 1,0010 | 0,0005  | 0,9996 | 1,0021 |
|      | Comp princ      | 1,0005 | 0,0004  | 0,9999 | 1,0012 |
| nov  | <i>k</i> -Means | 1,0130 | 0,0076  | 0,9946 | 1,0318 |
|      | Red. Recur      | 1,0254 | 0,0158  | 1,0000 | 1,0748 |
|      | Scen Red        | 1,0125 | 0,0120  | 0,9863 | 1,0341 |
|      | Reticulado      | 0,9999 | 0,0069  | 0,9853 | 1,0130 |
|      | Comp princ      | 1,0062 | 0,0001  | 1,0061 | 1,0064 |

Tabela 5.5: Consolidação dos resultados (p.u.)

[Fonte: elaboração própria]

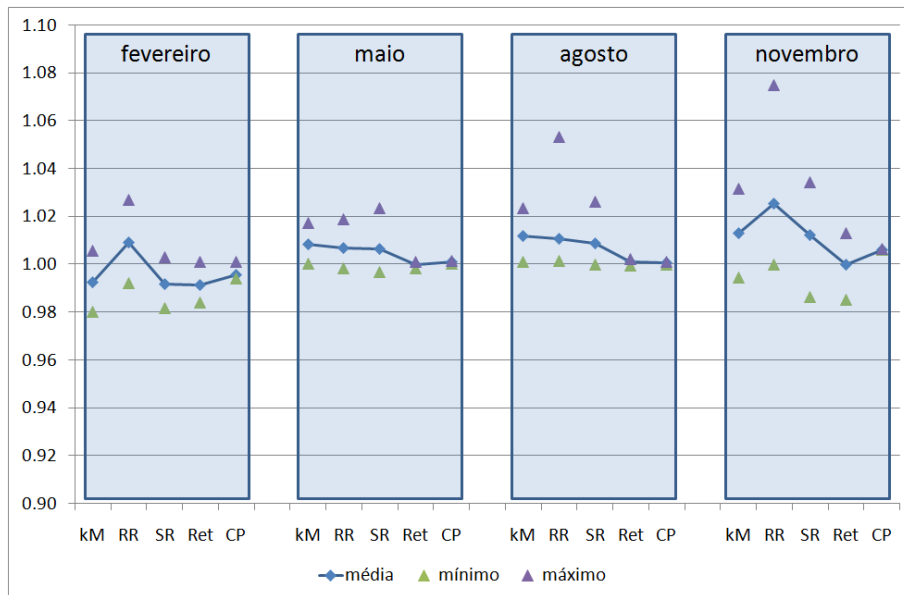


Figura 5.30: Valores ótimos consolidados em p.u., considerando os métodos kM, RR, SR, Ret e CP (k-Means, redução recursiva, ScenRed, reticulado e componentes principais, respectivamente)

[Fonte: elaboração própria]

#### 5.4.4 Redução recursiva

Embora este método apresente uma justificativa teórica acerca de sua adequação para a representação de cenários em problemas estocásticos, o desempenho para os casos estudados não foi o melhor. Há uma variabilidade maior para todos os tamanhos de população considerados e não se identifica uma tendência de redução da mesma com o aumento tamanho da amostra iid considerada.

#### 5.4.5 Reticulado

Este método de agregação apresentou resultados menos variáveis, a partir de uma amostra iid de tamanho 3000. Como mencionado anteriormente, é necessário que a cardinalidade da amostra iid seja suficiente para garantir que haja sempre algum elemento em cada uma das classes. Os estudos indicam que o tamanho mínimo da amostra iid é 3000, o que não representa qualquer óbice ao método, tendo em vista a elevada eficiência computacional do mesmo.

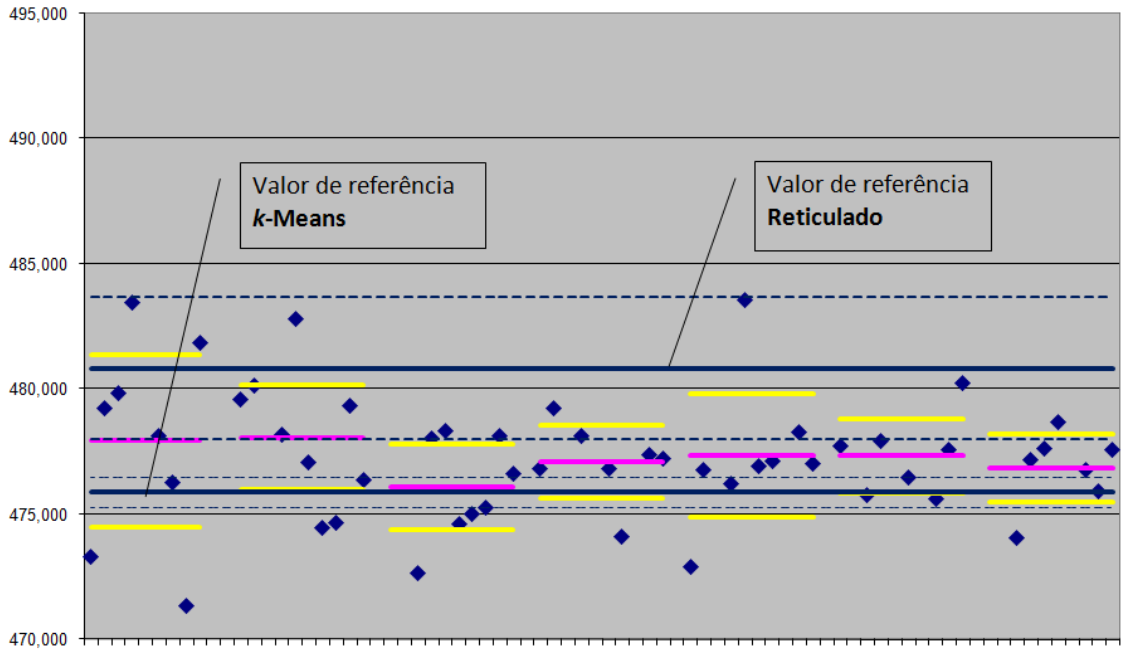
## 5.4.6 Componentes Principais

Inicialmente, o estudo foi realizado considerando quatro componentes principais discretizadas em três valores cada um, correspondendo a classificação de padrões Alto, Médio e Baixo. A probabilidade do ponto central foi escolhida igual a  $\tau = 0,68268$ , correspondente à área da normal padrão entre menos e mais um desvio padrão, resultando que  $\theta = 0,15866$  é a probabilidade dos pontos simétricos extremos, distantes do ponto central de  $\alpha = 1,7752$ . Variações com relação à probabilidade da classe central  $\tau$  de  $\pm 0,05$  não apresentam variação significativa para os valores ótimos encontrados.

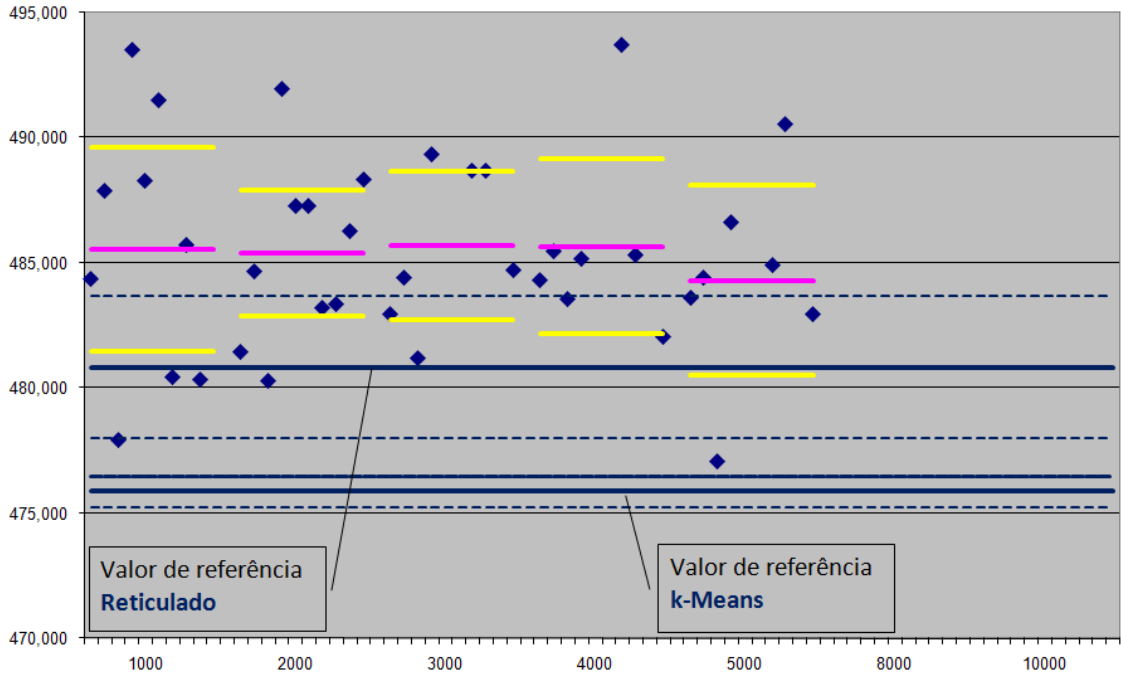
## 5.4.7 Resultados Obtidos

As figuras a seguir ilustram o comportamento da solução ótima do problema de otimização face aos diversos métodos de agregação tratados neste trabalho e para cada um dos casos considerados. Cada figura apresenta os valores ótimos alcançados pelo problema de otimização, a partir da agregação em 81 classes. Foram consideradas, para cada mês, 10 amostras iid de tamanho variando entre 1000...10000, geradas conforme descrito no item 5.2. Cada gráfico apresenta o valor ótimo encontrado para a solução do problema de planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo considerando dois estágios. Nestes gráficos também está ressaltado o valor de referência definido no item 5.4.1 e o valor da solução ótima obtido com o método das componentes principais.

As Figuras 5.31, 5.32, 5.33 e 5.34, nas páginas 115 à 122, apresentam os valores ótimos obtidos para o mês de fevereiro, maio, agosto e novembro, respectivamente, considerando os quatro métodos e diversos tamanhos de amostra e sementes. Pode-se notar que o método reticulado foi o que apresentou menor discrepância em relação ao valor de referência, para todos os casos.



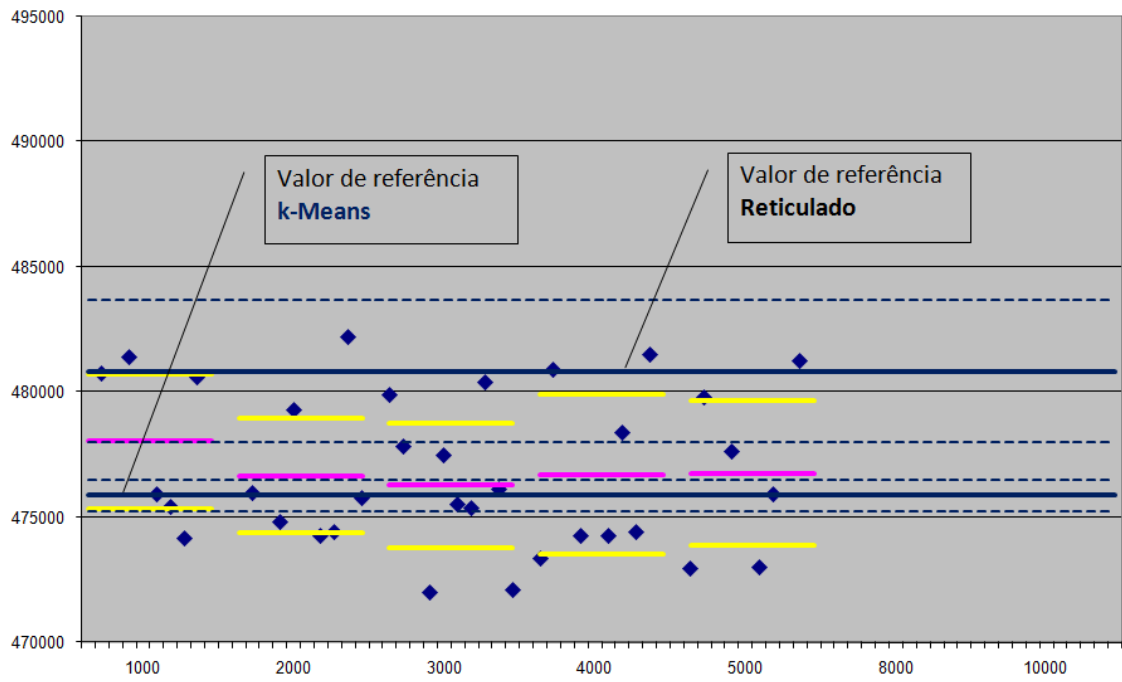
(a) *k*-Means



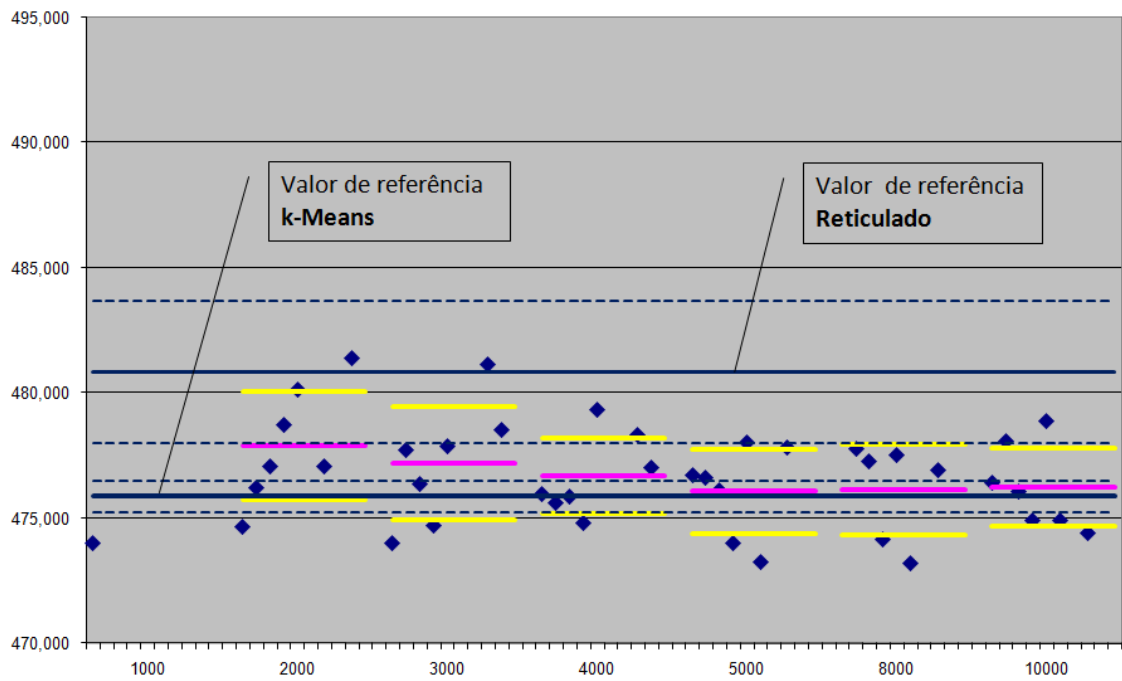
(b) Redução recursiva

Figura 5.31: Fevereiro – Métodos de agregação (1/2)

[Fonte: elaboração própria]



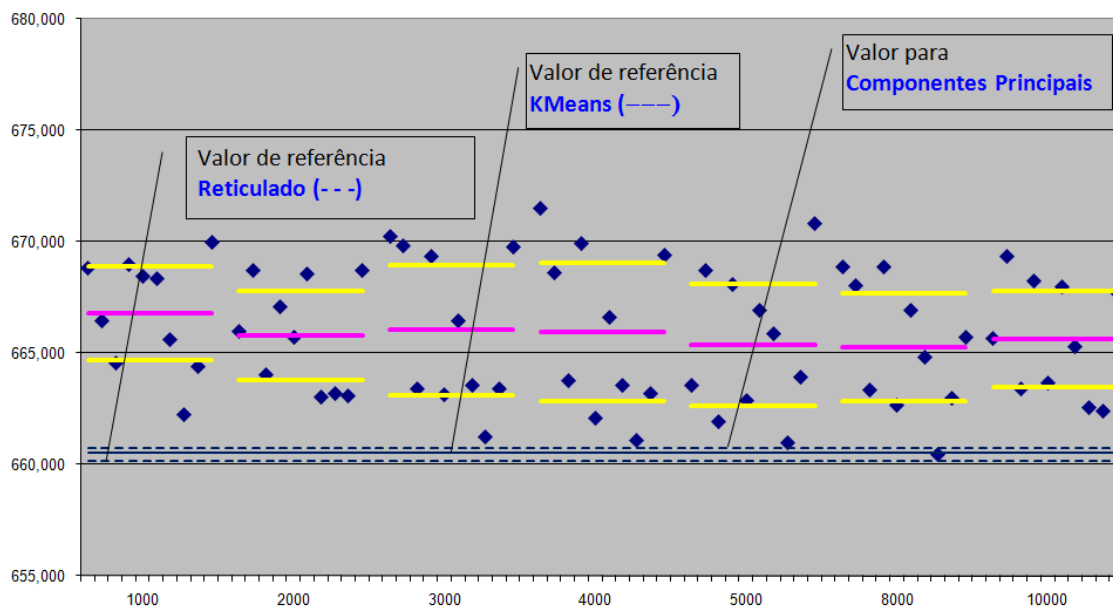
(c) ScenRed – GAMS



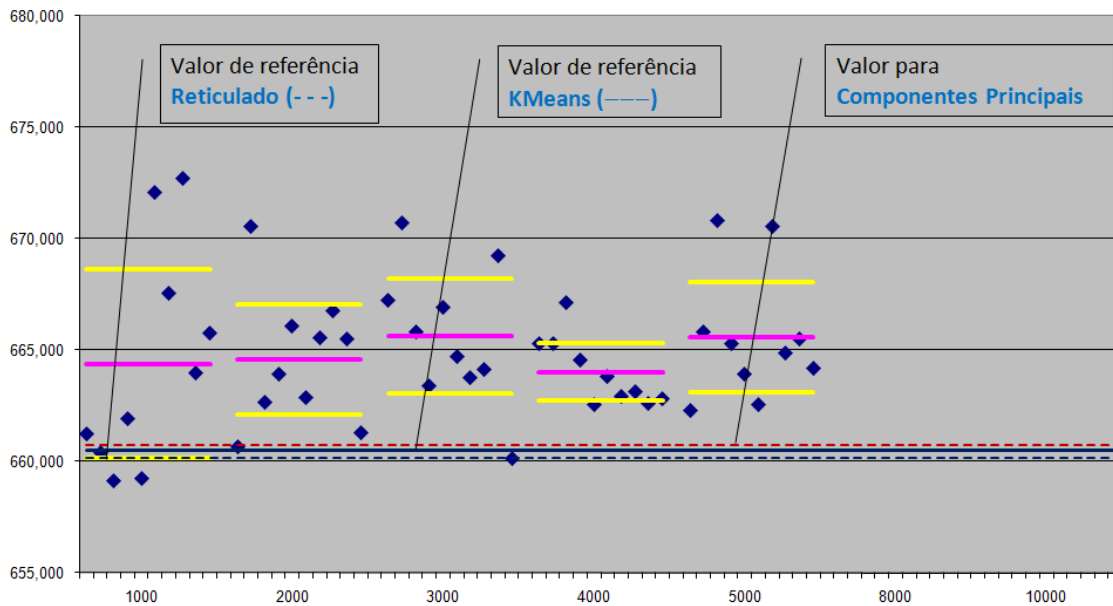
(d) Reticulado

Figura 5.31: Fevereiro – Métodos de agregação (2/2)

[Fonte: elaboração própria]



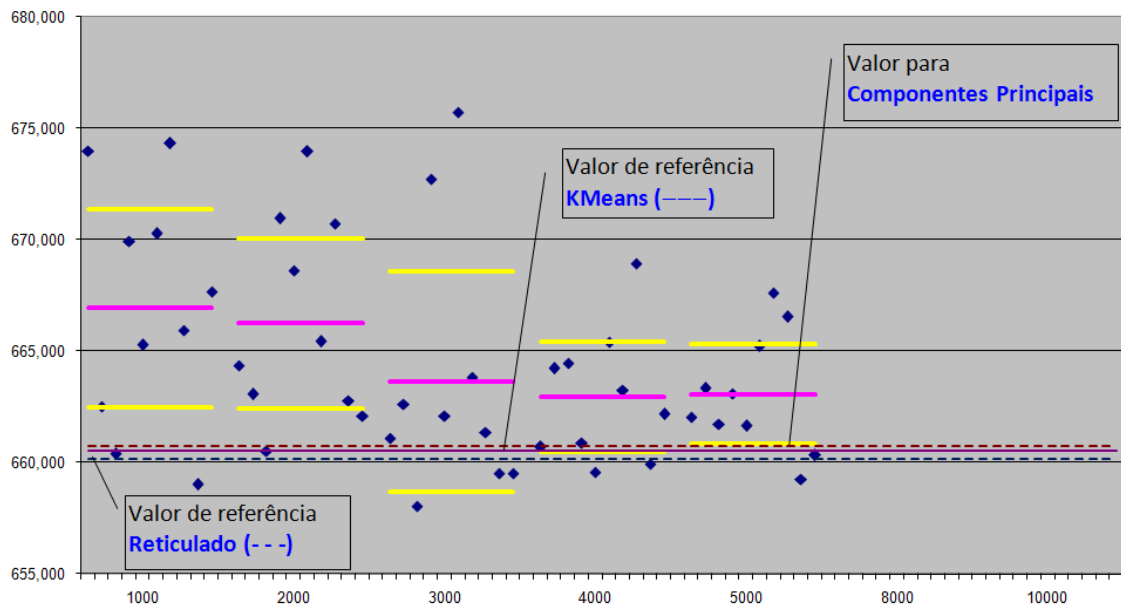
(a) *k*-Means



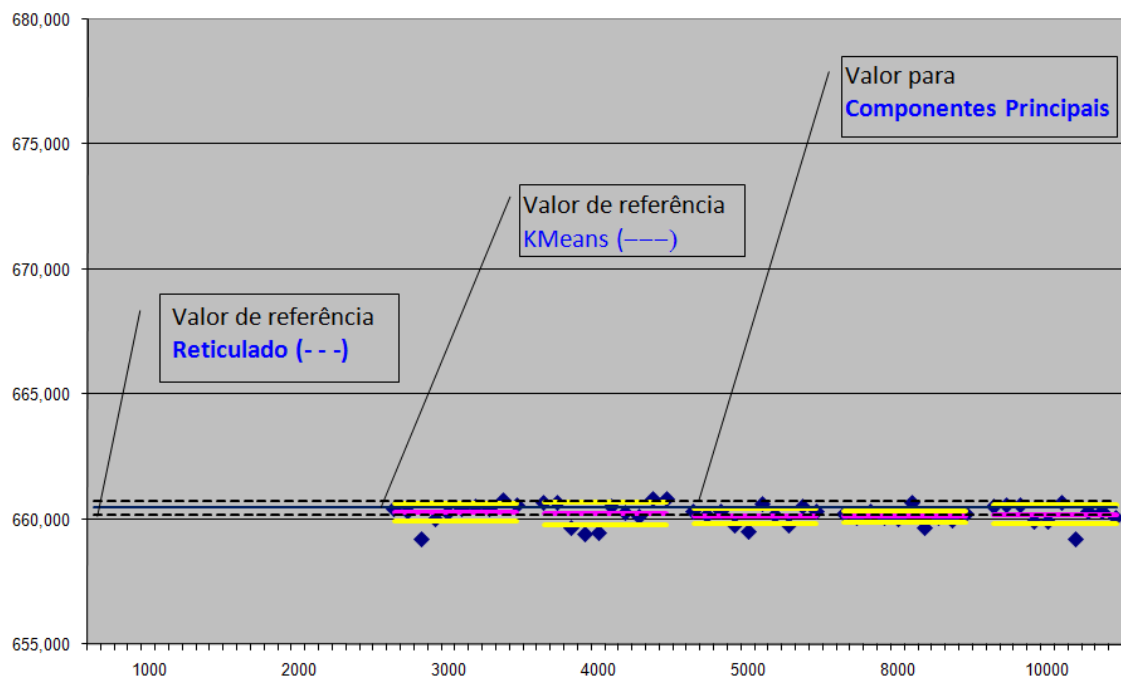
(b) Redução recursiva

Figura 5.32: Maio – Métodos de agregação (1/2)

[Fonte: elaboração própria]



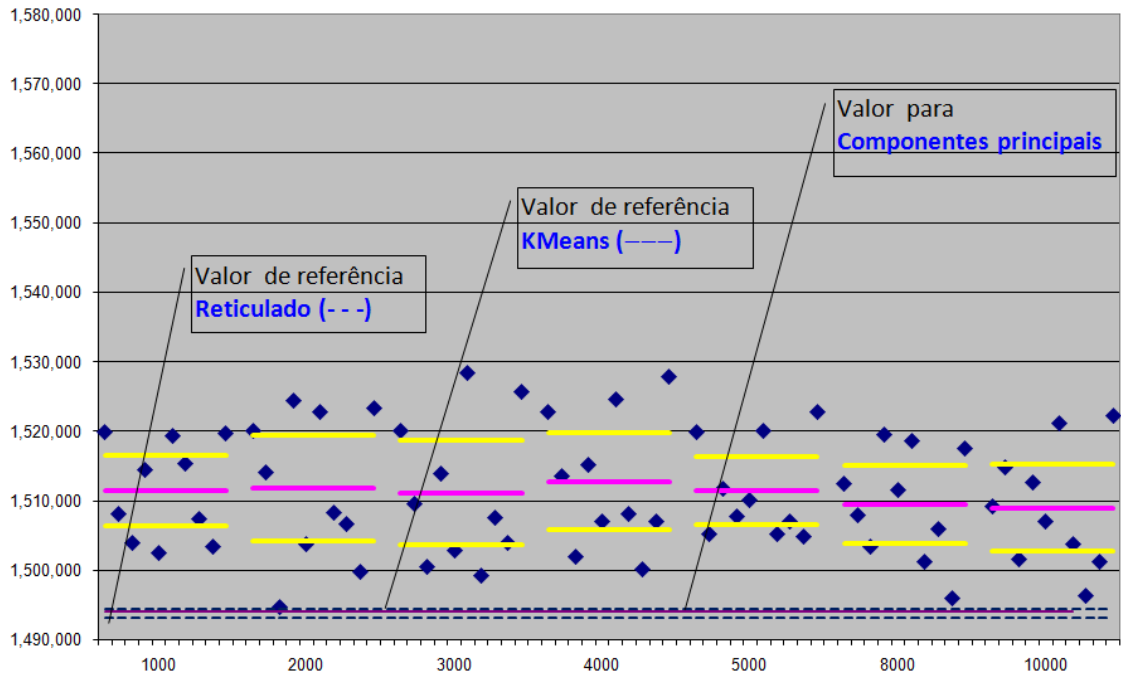
(c) ScenRed – GAMS



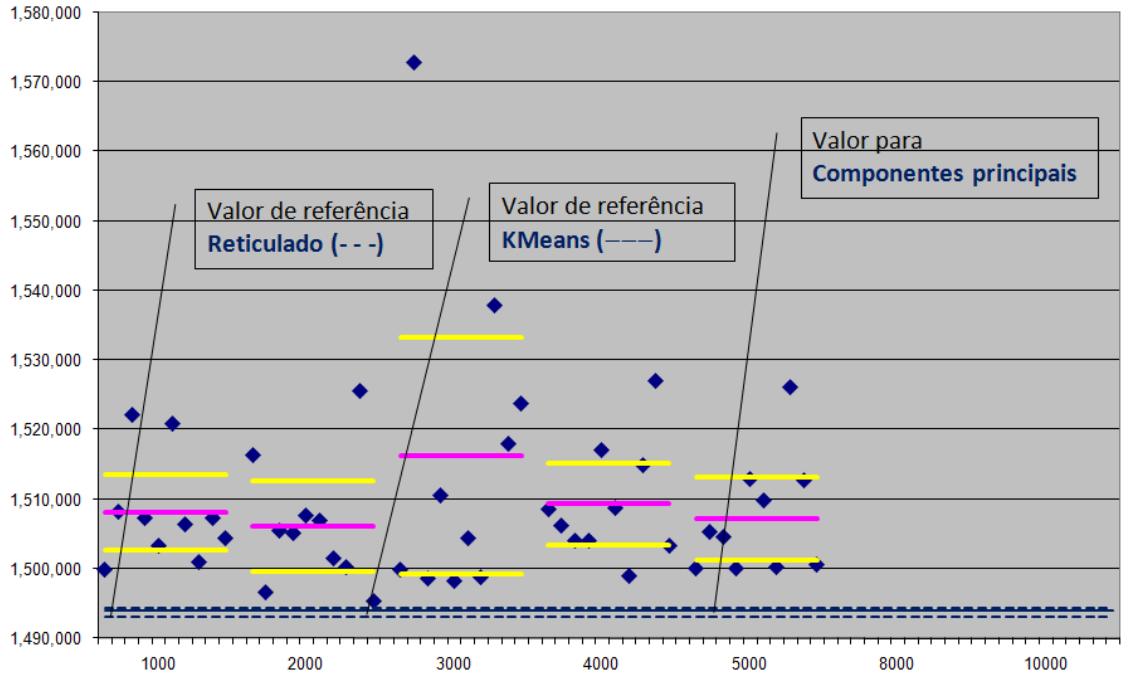
(d) Reticulado

Figura 5.32: Maio – Métodos de agregação (2/2)

[Fonte: elaboração própria]



(a) *k*-Means

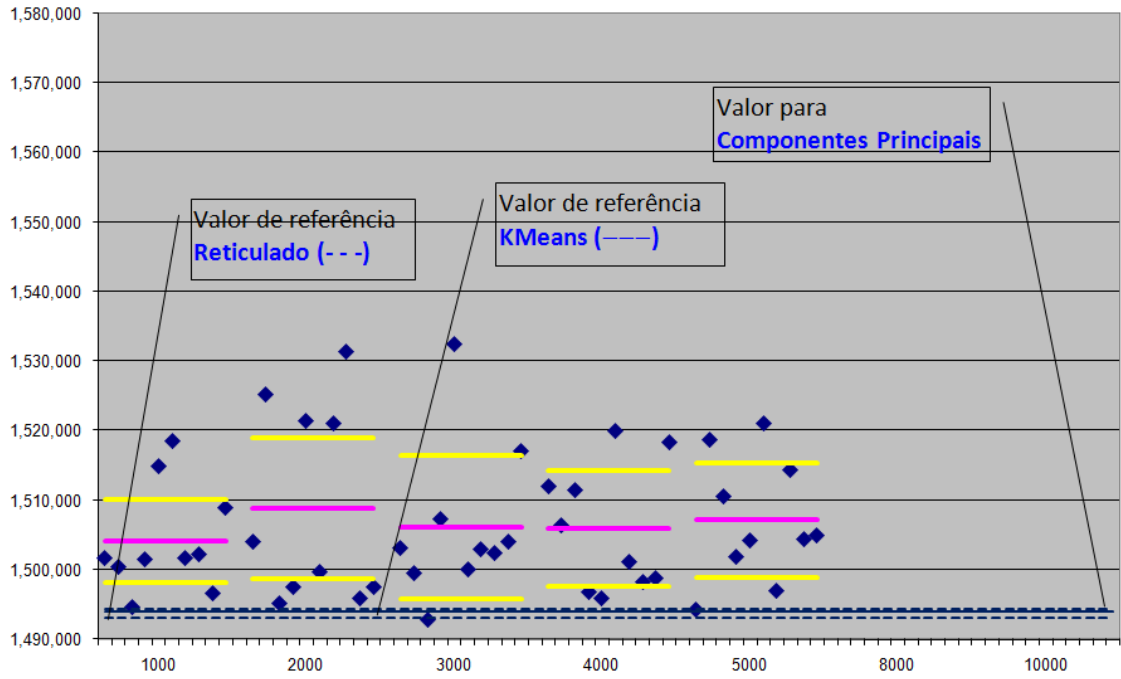


(b) Redução recursiva

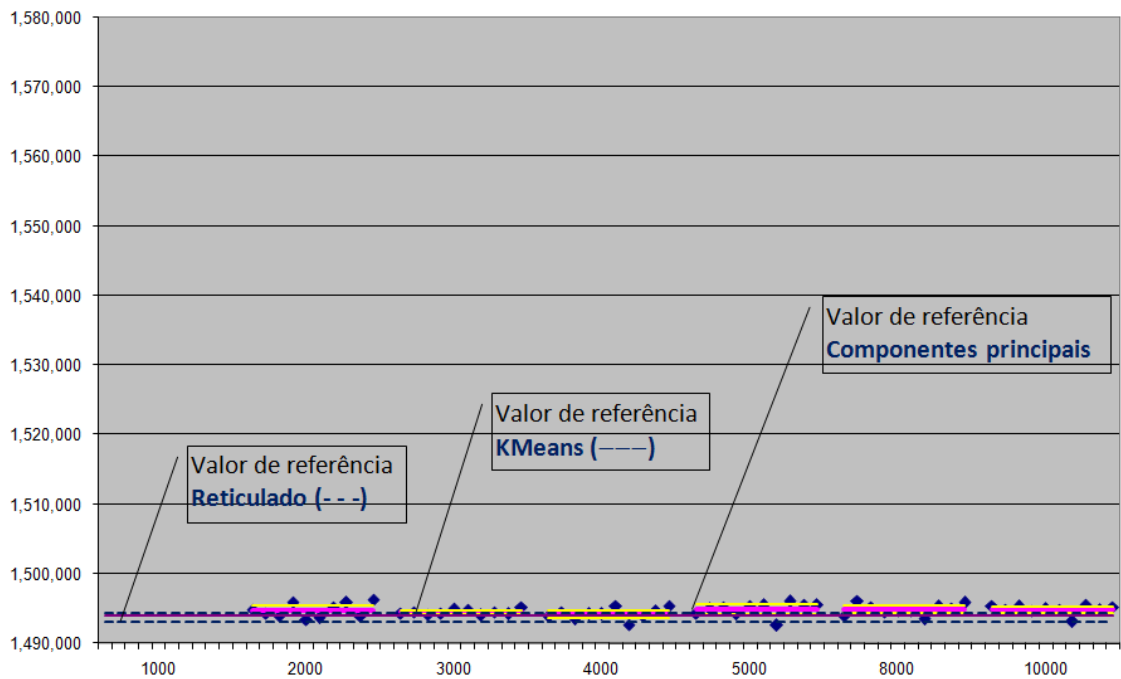
Figura 5.33: Agosto – Métodos de agregação (1/2)

[Fonte: elaboração própria]





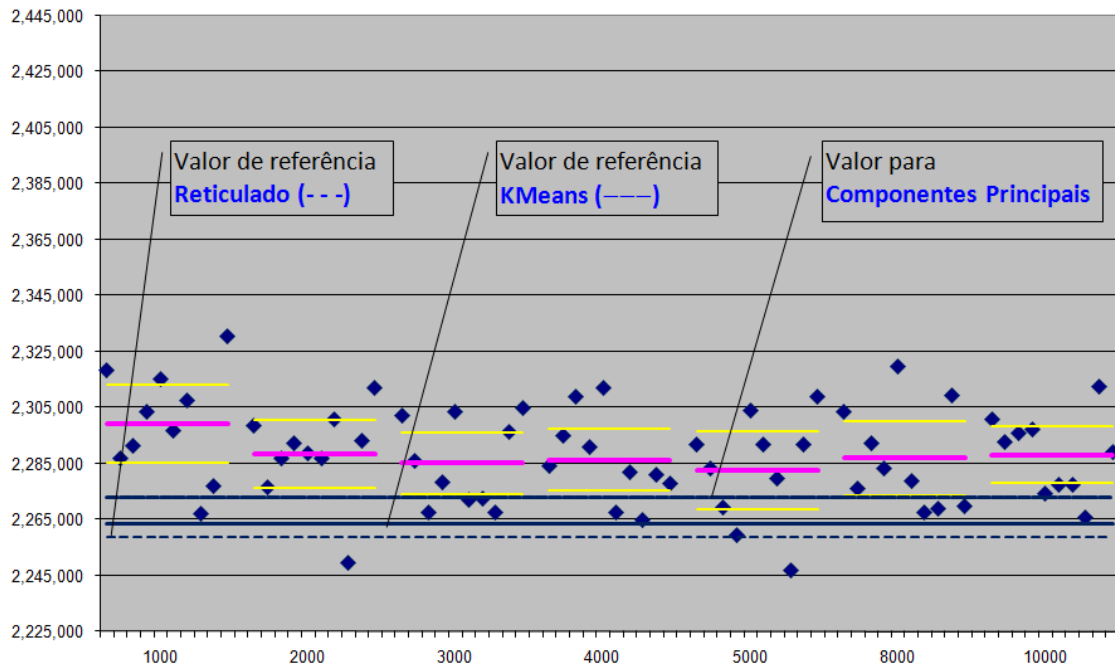
(c) ScenRed – GAMS



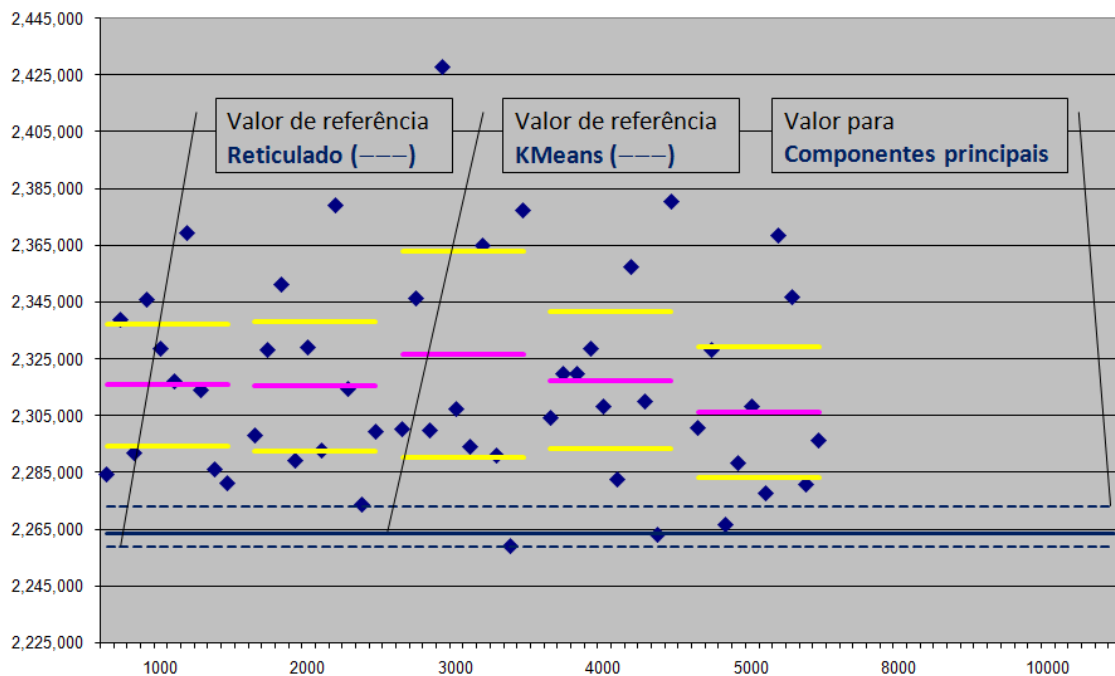
(d) Reticulado

Figura 5.33: Agosto – Métodos de agregação (2/2)

[Fonte: elaboração própria]



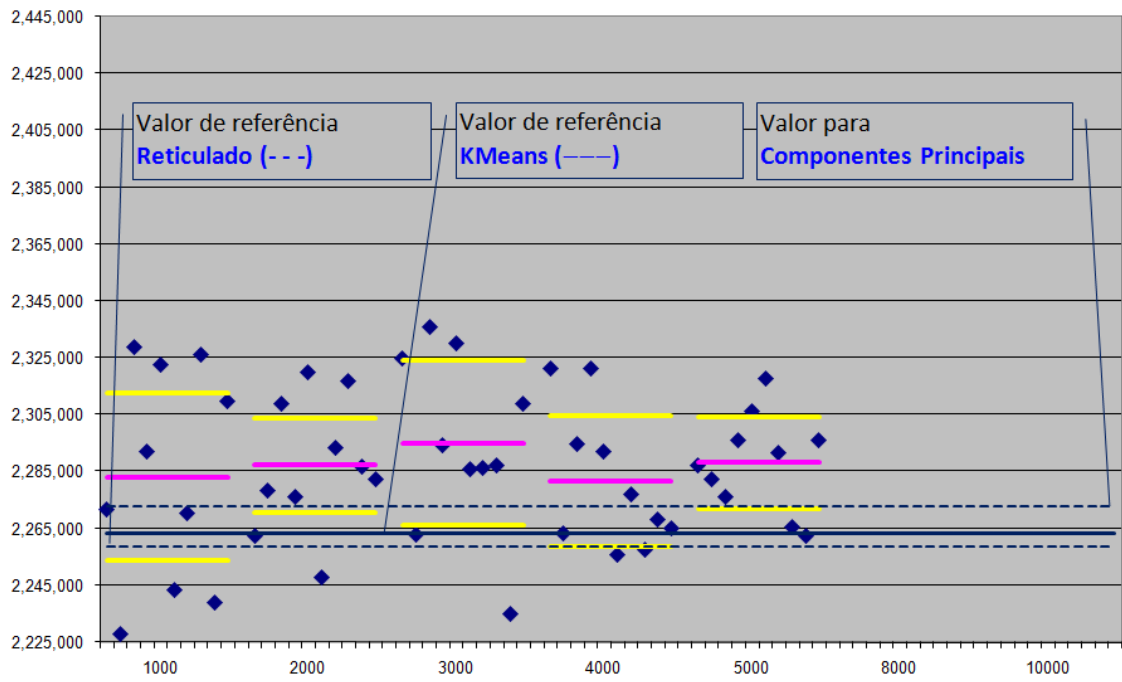
(a) *k*-Means



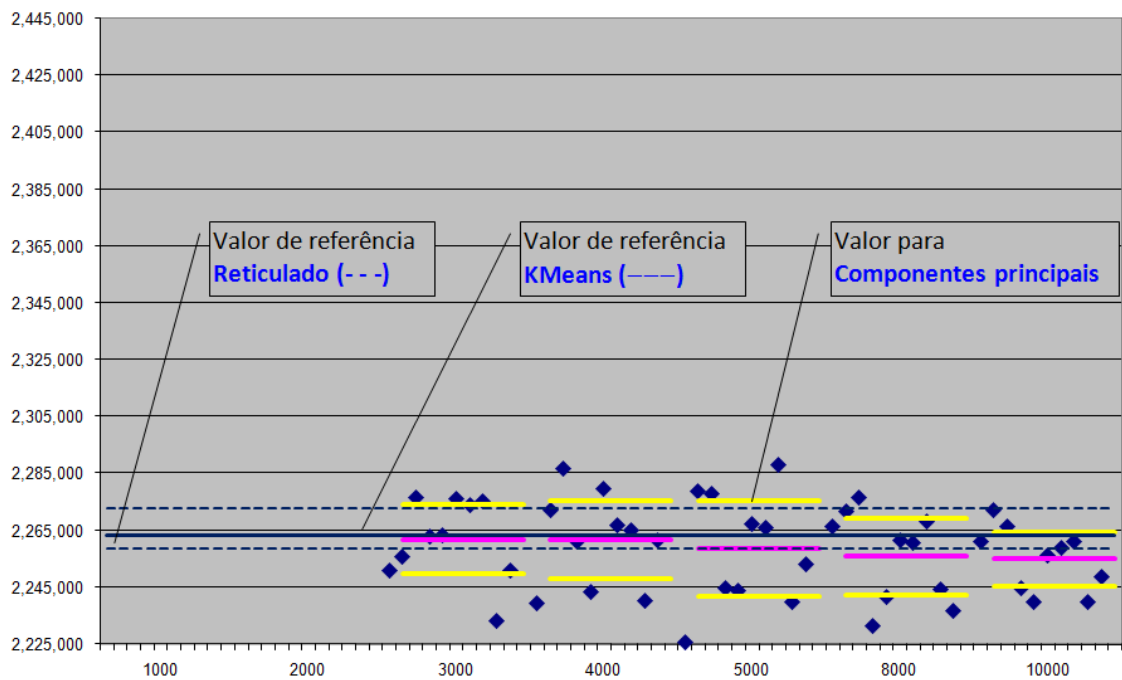
(b) Redução recursiva

Figura 5.34: Novembro – Métodos de agregação (1/2)

[Fonte: elaboração própria]



(c) ScenRed – GAMS



(d) Reticulado

Figura 5.34: Novembro – Métodos de agregação (2/2)

[Fonte: elaboração própria]

## 5.4.8 Estudos adicionais

Estes estudos adicionais têm por objetivo investigar aspectos não tratados nos itens anteriores, a saber: a estabilidade do método de discretização usando componentes principais e a adequação de uso de amostras reduzidas de tamanho 16. Estes estudos não exaurem o assunto mas lançam alguma indicação acerca do que se pode esperar.

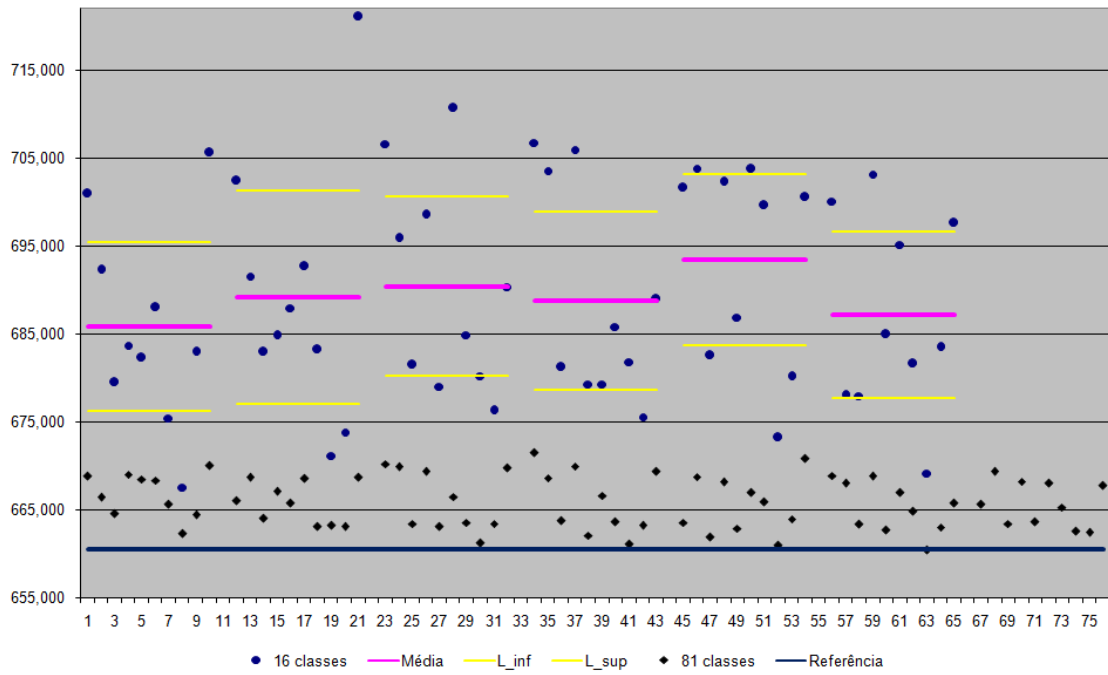
### 5.4.8.1 16 representantes

No item 5.1 afirmou-se que amostras reduzidas de tamanho 81 eram suficientes para se ter estabilidade nos resultados. Neste item, expande-se a análise considerando os métodos de redução  $k$ -Means e reticulado, para diferentes amostras reduzidas obtidas a partir de diversos tamanhos de amostras *iid*, à semelhança dos estudos reportados no item anterior, 5.2.

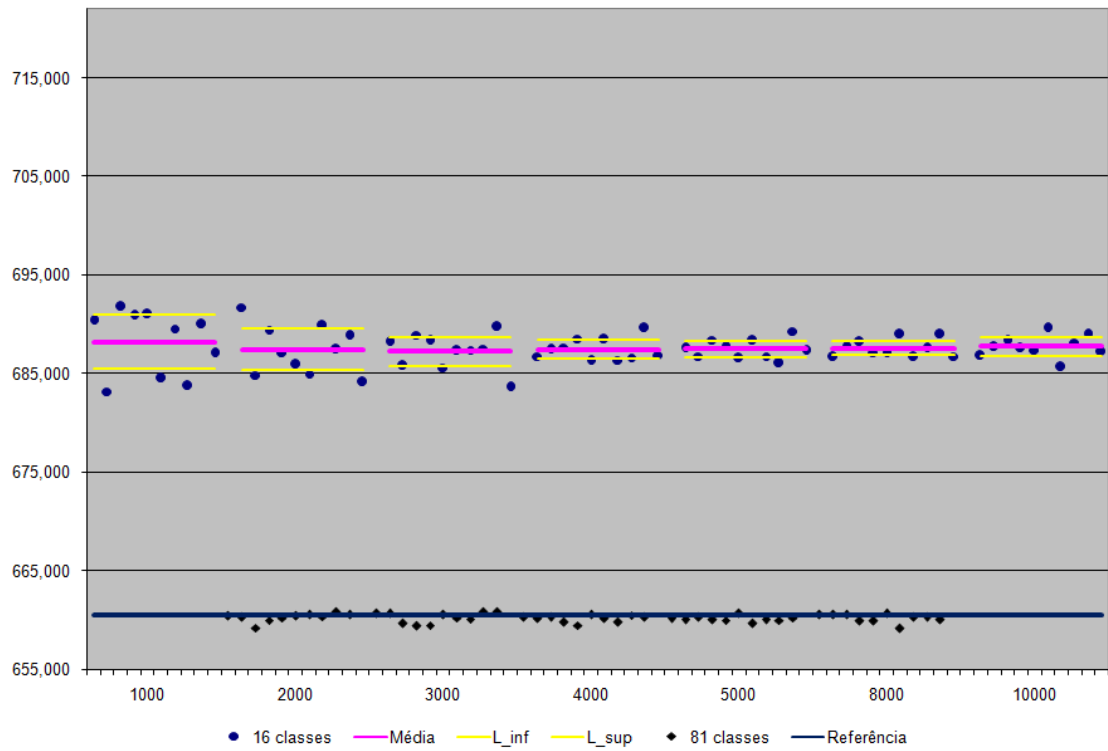
Desta forma, conforme a proposta de estrutura da árvore proposta, nesta seção investiga-se o uso de apenas 16 classes, que correspondem a considerar as categorias A e B para as energias naturais afluentes aos quatro subsistemas do SIN. As Figuras 5.35, 5.36 e 5.37, páginas 124, 125 e 126, respectivamente, resumem os resultados alcançados, onde se pode observar que considerar apenas 16 classes introduz um viés com respeito ao valor de referência. Adicionalmente, pode-se verificar que o método  $k$ -Means apresenta variância maior que o método reticulado. Não estão apresentados os casos com o método de redução recursiva, uma vez que este apresentou resultados não discrepantes em relação a esses dois métodos, como visto acima.

### 5.4.8.2 Estabilidade com componentes principais

Como o método de discretização a partir de componentes principais não envolve sorteio aleatório dos cenários, a estabilidade da solução pode ser avaliada considerando variações para a probabilidade  $\tau$  atribuída ao ponto central da discretização de cada componente principal. Esta avaliação, apresentada a seguir, foi realizada por (OLIVEIRA; COSTA, 2005), considerando uma configuração baseada no PMO de agosto de 2003 e quatro componentes principais, resultando em 81 cenários. A Ta-



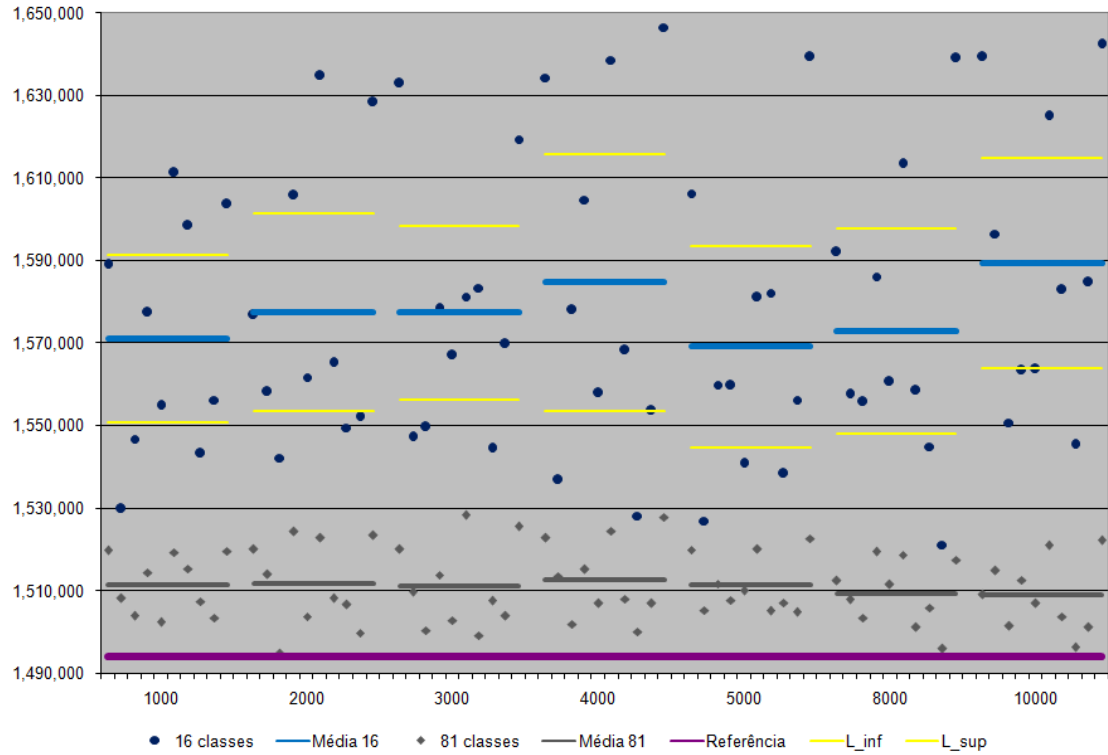
(a) *k*-Means



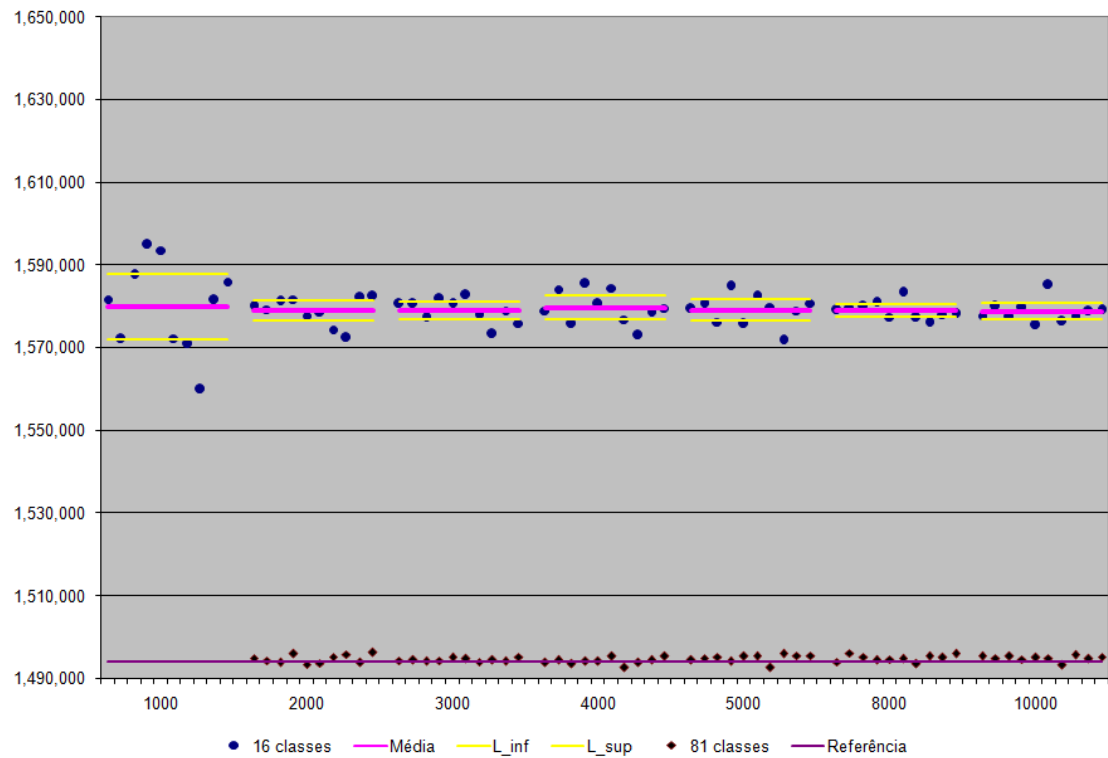
(b) Reticulado

Figura 5.35: Maio – Estudo com 16 classes

[Fonte: elaboração própria]



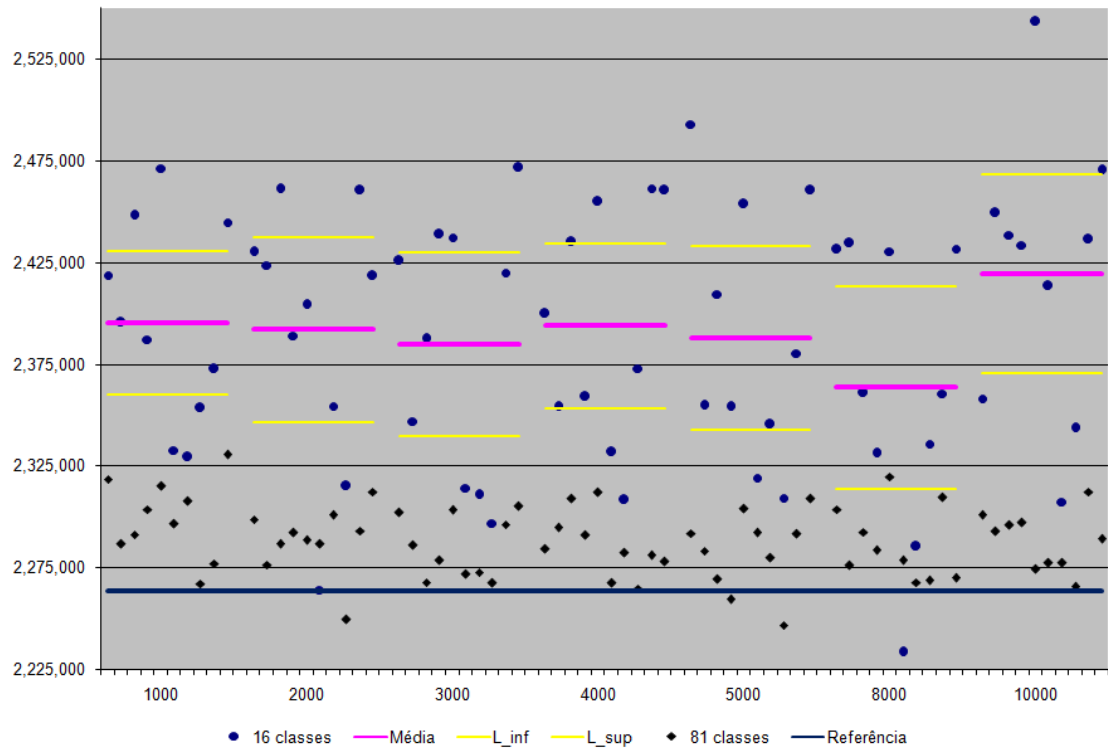
(a) *k*-Means



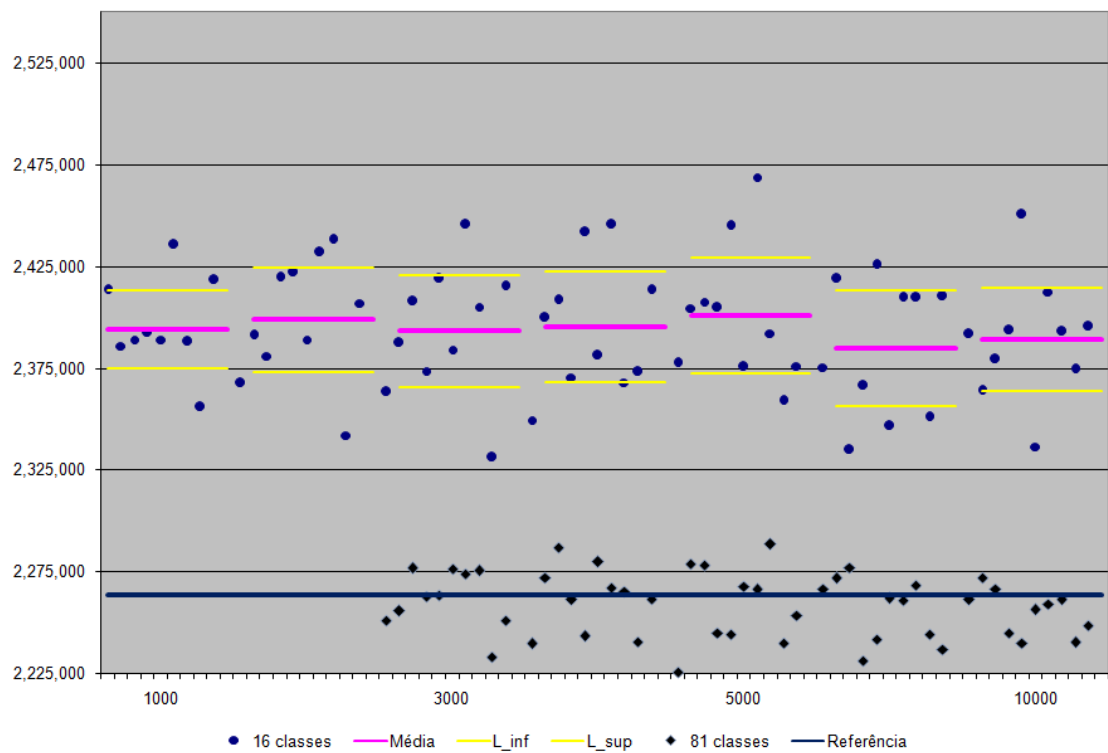
(b) Reticulado

Figura 5.36: Agosto – Estudo com 16 classes

[Fonte: elaboração própria]



(a) *k*-Means



(b) Reticulado

Figura 5.37: Novembro – Estudo com 16 classes

[Fonte: elaboração própria]

bela 5.6, página 127, apresenta os resultados obtidos para a função objetivo na qual o valor correspondente a  $\tau = 0,68268$  foi tomado igual a 1, considerando variações no intervalo de  $\tau \pm 0,05$ . Os resultados permitem afirmar que pequenas variações no parâmetro  $\tau$  da árvore de cenários proposta resultam em pequenas alterações no valor ótimo do problema de planejamento da operação a médio prazo, indicando a estabilidade da solução obtida com a árvore reduzida. Pode-se observar que existe uma forte correlação negativa entre os valores ótimos obtidos e a probabilidade  $\tau$  atribuída à classe central. Uma possível explicação para este comportamento é a que, à medida que o valor da probabilidade central  $\tau$  diminui, os representantes selecionados para as classes B e A tornam-se mais próximos dos valores centrais e os custos associados tendem a ser menores. Naturalmente, esta conjectura necessita ser provada.

| $\tau$ | F. Obj. (p.u.) |
|--------|----------------|
| 0,73   | 0,9994         |
| 0,72   | 0,9996         |
| 0,70   | 0,9998         |
| 0,68   | 1,0000         |
| 0,67   | 1,0002         |
| 0,65   | 1,0004         |
| 0,63   | 1,0007         |

Tabela 5.6: Análise de estabilidade em relação à probabilidade  $\tau$  — Valores da função objetivo (p.u.)

[Fonte: (OLIVEIRA; COSTA, 2005)]

Da modo análogo ao que foi apresentado na Seção 5.4.1, (OLIVEIRA; COSTA, 2005) adotaram, como referência para avaliar o viés do valor da solução obtida com a árvore de cenários proposta, o valor médio da solução de dez problemas de planejamento da operação, cada um considerando mil cenários não equiprováveis, obtidos a partir da agregação de amostras iid distintas de dez mil cenários cada, usando o método  $k$ -Means. O tempo médio de execução de cada um destes problemas é de 43 minutos (Pentium IV de 2GHz com 1Gb de memória RAM). Considerando o valor de referência igual a 1 p.u., o resultado obtido com a árvore de cenários dis-



cretizados é igual a 1,00025 p.u., dentro do intervalo de confiança de 95% do valor de referência, (0,99966, 1,00034). O tempo de execução no caso reduzido é de 3 minutos 51 segundos no mesmo computador, com um ganho de dez vezes em esforço computacional. A Figura 5.38, página 128, ilustra a dispersão dos valores da função objetivo para os 10 casos obtidos com árvore via agregação  $k$ -Means, o intervalo de confiança de 95% correspondente à média destes valores (valor de referência), o valor encontrado com a árvore proposta (método de discretização) e ainda os valores correspondentes a dez árvores, cada uma usando uma amostra de 1000 cenários iid.

Adicionalmente, (OLIVEIRA; COSTA, 2005) apresentam, uma análise da estabilidade para dois estágios estocásticos, considerando uma árvore de  $81 \times 16 = 1296$  cenários discretizados pelo método componentes principais. O valor de referência foi estimado como a média dos valores ótimos da solução dos problemas de otimização obtidos a partir de quatro árvores reduzidas via agregação  $k$ -Means, todas com o mesmo número de cenários. O resultado obtido com a árvore proposta é 0,12% superior ao valor de referência estimado para este caso de dois estágios estocásticos,

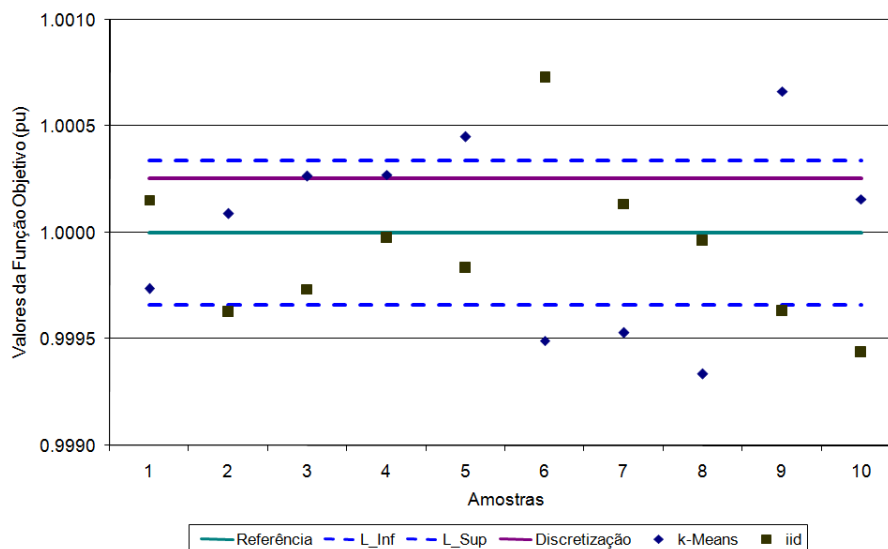


Figura 5.38: Valor de referência para a função objetivo e seu intervalo de confiança de 95%. Valor obtido com método de discretização, valores correspondentes às dez árvores usando agregação e a dez árvores provenientes de amostras iid (p.u.).

[Fonte: (OLIVEIRA; COSTA, 2005)]

indicando que a discretização, ao ser aplicada para o problema considerando múltiplos estágios estocásticos, permite uma estimativa do custo operativo médio com boa precisão.

#### 5.4.9 Caso com três estágios

Neste item são apresentadas análises do comportamento das árvores de cenários propostas para problemas com dois estágios estocásticos, considerando casos de aplicação baseados em configurações do PMO de agosto de 2003 e de maio de 2005. A estrutura da árvore de três estágios considera 16 cenários a partir de cada um dos 81 cenários do segundo estágio. O total de cenários neste caso (folhas da árvore) é igual a  $81 \times 16 = 1296$ . O total de 81 cenários corresponde à combinação dos casos de energia afluyente alta, média e baixa em cada um dos quatro subsistemas ( $3^4$ ), e o total de 16 cenários corresponde à combinação de energias afluyentes baixas e altas em cada um dos quatro subsistemas ( $2^4$ ).

##### 5.4.9.1 Caso Agosto de 2003

A referência foi assumida como a solução obtida para um problema de três estágios com uma árvore com a estrutura  $81 \times 81 = 6\,561$  cenários. Esta árvore foi construída pelo modelo BONSAI a partir do método de componentes principais, considerando  $\tau = 0,68$  para a probabilidade da classe central para cada estágio estocástico.

A Figura 5.39, página 130, apresenta os resultados obtidos, considerando:

- 10 soluções a partir de  $81 \times 16$  cenários independentes;
- 10 soluções a partir de  $81 \times 16$  cenários obtidos pela agregação via método reticulado (81 cenários a partir de 5000 iid, 16 cenários a partir de 1000 iid);  
e
- $81 \times 16$  cenários obtidos a partir do método de componentes principais, considerando três probabilidades diferentes para a classe central ( $\tau = 0,63, 0,68$  e  $0,73$ ).

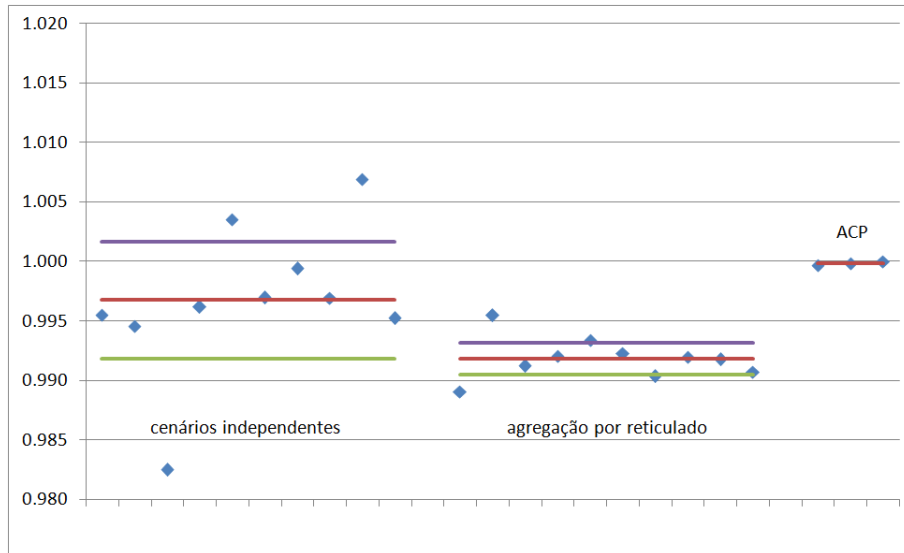


Figura 5.39: Agosto 2003 — Caso três estágios (p.u.).

[Fonte: elaboração própria]

Os valores da solução ótima obtidos a partir de amostras independentes apresentam, como era de se prever, maior variância, enquanto que os valores referentes à solução obtida com o método reticulado e componentes principais tem menor variância. Adicionalmente, os valores associados às soluções obtidas a partir dos cenários selecionados pelo método de componentes principais têm a menor variância e, neste caso, são os mais próximos do valor de referência. Com respeito às soluções obtidas, pode-se ressaltar que, para as amostras *iid* consideradas, houve uma variação no custo marginal de operação do terceiro estágio da ordem de 20% entre elas, o que corresponde ao despacho adicional de duas usinas termoeletricas. Para os cenários obtidos a partir do método de componentes principais tal variação é de apenas 7%, sendo que esta variação pode ser compensada apenas por despacho diferenciado das usinas hidroelétricas sem qualquer alteração nas unidades termoeletricas e, para o método reticulado, neste caso não se observa qualquer variação nos custos marginais.

#### 5.4.9.2 Caso Maio de 2005

A metodologia proposta foi aplicada à uma configuração do SIN baseada no PMO de maio de 2005. Nesta configuração foram consideradas 105 usinas hidroelétricas, com capacidade instalada total de 73 063 MW, 59 usinas termoeletricas, perfazendo 9 929 MW de capacidade instalada. Do total de 105 postos de vazão, 47

foram considerados linearmente dependentes dos outros 58 postos principais. O caso estudo considerou os meses de maio, abril e junho. A árvore de cenários foi obtida pelo método de decomposição em componentes principais considerando quatro maiores componentes para o primeiro estágio estocástico e os valores  $A, M, B$ . Para o segundo estágio foram consideradas apenas os valores  $A, B$ , resultando em um total de  $81 \times 16 = 1296$  cenários e  $1 + 81 + 81 \times 16 = 1378$  nós na árvore (problemas a serem resolvidos). Este caso reproduz o apresentado em (COSTA; OLIVEIRA; LEGEY, 2006).

Uma extensão do modelo de otimização apresentado em (OLIVEIRA; COSTA, 2002) foi utilizada para avaliar a árvore de cenários. Este modelo a usinas individualizadas foi desenvolvido em linguagem AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2002) e representa as vazões turbinadas e vertidas, os despachos das usinas térmicas e os intercâmbios entre os subsistemas, levando em conta os limites de transmissão.

O número de linhas e colunas do problema de programação estocástica depende do tamanho da árvore de cenários e da dimensão do sistema hidrotérmico. Para problemas multi-estágio, este tamanho pode ser proibitivo para obter-se uma solução, se não forem empregadas técnicas de decomposição. Neste caso particular, apesar de o problema de operação resultante possuir 154 000 variáveis e 782 250 restrições, com 1 617 560 valores não-nulos na matriz, pode ainda ser resolvido eficientemente usando algoritmos de pontos interiores, como o Xpress-Optimizer Barrier solver (DASH-OPTIMIZATION, 2003). O tempo de solução em um computador Pentium IV de 2,8 GHz com 1 GB de memória foi de cerca de 3 minutos. A Tabela 5.7, página 132, apresenta o total de geração térmica e os custos marginais encontrados. Para o primeiro mês, toda a demanda é suprida pelas usinas hidroelétricas e nos meses seguintes há uma pequena geração térmica na região Sul para alguns poucos cenários. A região Sul é a única com custo marginal diferente de zero no primeiro estágio. Duas térmicas foram despachadas no estágio dois e seis no estágio três, de forma a atender a demanda. Os custos marginais se referem aos valores da água para as usinas hidroelétricas do subsistema Sul, devido às restrições de intercâmbio.

Para avaliar a estabilidade da solução encontrada, foram considerados dois cenários similares, produzidos variando-se a probabilidade da classe central  $\tau = 0,68$

| Subsistema | Geração térmica |           | Custo marginal |
|------------|-----------------|-----------|----------------|
|            | (MWh)           |           | (\$/MWh)       |
|            | Estágio 2       | Estágio 3 | Estágio 1      |
| Sudeste    | 0               | 0         |                |
| Sul        | 623             | 9360      | 3,24           |
| Nordeste   | 0               | 0         |                |
| Norte      | 0               | 0         |                |

Tabela 5.7: Geração térmica média e custos marginais — Árvore de referência  
[Fonte: (COSTA; OLIVEIRA; LEGEY, 2006)]

de  $\pm 0,05$ . A Tabela 5.8, página 132, sumaria os resultados. A geração térmica média foi produzida pelas mesmas térmicas despachadas usando a árvore de referência. Os custos marginais são **2,84** \$/MWh para a árvore obtida com  $\tau = 0,63$  e **3,47** \$/MWh para a árvore obtida com  $\tau = 0,73$ . Pode-se notar que os resultados são próximos àqueles encontrados com a árvore de referência, o que indica que o método de discretização e a estrutura proposta fornecem resultados estáveis.

| Célula central<br>probabilidade | Subsistema | Geração térmica |           | Custo marginal |
|---------------------------------|------------|-----------------|-----------|----------------|
|                                 |            | (MWh)           |           | (\$/MWh)       |
|                                 |            | Estágio 2       | Estágio 3 | Estágio 1      |
| $\tau = 0,63$                   | Sudeste    | 0               | 0         |                |
|                                 | Sul        | 144             | 8317      | 2,84           |
|                                 | Nordeste   | 0               | 0         |                |
|                                 | Norte      | 0               | 0         |                |
| $\tau = 0.73$                   | Sudeste    | 0               | 0         |                |
|                                 | Sul        | 2504            | 10133     | 3,47           |
|                                 | Nordeste   | 0               | 0         |                |
|                                 | Norte      | 0               | 0         |                |

Tabela 5.8: Geração térmica média e custos marginais — Análise de estabilidade  
[Fonte: (COSTA; OLIVEIRA; LEGEY, 2006)]

## 5.5 Comentários finais

Neste capítulo, a metodologia descrita no Capítulo 4 para geração de árvores de cenários que representem as incertezas das afluências em problemas de planejamento da operação de médio prazo foi aplicada a diversos casos estudo, considerando diferentes configurações do SIN. A adequação da estrutura proposta foi analisada tanto do ponto de vista dos aspectos hidrológicos quanto da estabilidade dos resultados obtidos com o seu uso no problema de otimização. Os estudos reportados neste capítulo permitem concluir que:

- considerar amostras de **81** cenários para o primeiro estágio estocástico do problema de planejamento energético conduz a resultados estáveis. Amostras que consideram apenas **16** cenários não apresentam resultados estáveis e, por outro lado, o esforço computacional decorrente do aumento do tamanho da amostra para até **256** cenários não resulta em aumento significativo de estabilidade e precisão;
- árvores com estrutura  $(81 \times 16)$  são adequadas para tratar problemas de três estágios, sendo que a perda de precisão devida à consideração de amostras reduzidas é largamente compensada pela diminuição dos tempos de computação necessários para a solução do problema; e
- dentre os métodos estudados para a definição das árvores reduzidas, os que apresentaram melhor resultado são:
  - a geração de amostras com elevado número de realizações *iid* seguida de redução da cardinalidade por meio do método reticulado; e
  - o método de discretização usando componentes principais.

## Capítulo 6

### A incerteza importa?

Resolver o problema de operação considerando incertezas, formulado como um problema linear de programação estocástica (PPE), demanda um considerável esforço computacional, mesmo quando se considera uma amostra reduzida para os cenários. Uma questão que se coloca é saber se este esforço vale a pena. A maioria dos problemas de decisão certamente é afetada pela aleatoriedade, mas daí não decorre imediatamente que devemos considerar uma formulação que leve em conta essa aleatoriedade na solução do problema: a arte de modelar também compreende manter os aspectos relevantes e descartar aqueles irrelevantes (KALL; WALLACE, 1994).

Massé, no seu livro acerca de planejamento da operação datado de 1946, (MASSÉ, 1946), já argumentava que, ao usar modelos determinísticos para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, tratando o futuro como conhecido, recai-se numa abordagem muito otimista e que desconsidera a flexibilidade. Além disso, o mesmo autor observa que enquanto modelos de otimização multi-período fornecem a decisão para todos os períodos, a abordagem estocástica produz uma estratégia de decisão, i.e., decisões para todos os estágios e estados do período de planejamento, (WALLACE; FLETEN, 2003).

Esta questão também vem sendo tratada na formulação do problema de planejamento da operação do SIN há já algum tempo. Por exemplo, (NETO et al., 1985) apresentaram uma análise dos enfoques determinístico e estocástico aplicados para

a resolução do problema de planejamento da operação de longo prazo (horizonte de cinco anos e estágios de decisão mensais), comparando três enfoques: o método da curva-guia, o método determinístico, considerando valores conhecidos e a programação dinâmica estocástica. O método da curva-guia foi utilizado de 1974 a 1978 no planejamento da operação do SIN e consiste em determinar o menor nível de armazenamento no início de cada mês que garanta o suprimento de energia, a partir daquele mês até o final do período de planejamento, sem a ocorrência de déficits na hipótese de repetição de qualquer uma das seqüências históricas de afluições. Embora seja de fácil implementação e tenha um apelo intuitivo de salvaguardar o sistema contra todas as ocorrências desfavoráveis ocorridas no passado, nada pode ser afirmado com relação às ocorrências futuras, pois o histórico é apenas uma das realizações possíveis do processo estocástico que produz as afluições. Adicionalmente, este método não atende qualquer critério de economicidade. A partir de 1979, as estratégias de operação do SIN passaram a ser calculadas por programação dinâmica estocástica utilizando como critério minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento. Como já foi visto anteriormente, esse problema tem elevada demanda computacional devido à dimensionalidade do espaço de estados.

O método determinístico, ao supor conhecidas as afluições para todo o período de planejamento, evita este problema. Neste método, a cada estágio, toma-se a decisão baseada nas melhores previsões disponíveis. No estágio seguinte, as previsões são atualizadas, o planejamento é refeito e as decisões associadas a este estágio são implementadas. Desta forma, determina-se uma trajetória que corresponde à evolução ótima dos reservatórios dadas as seqüências de afluições. Esta abordagem é intuitivamente atraente, pois reconhece o fato de que o plano de operação será efetivamente ajustado à medida que surgem novas informações e tenta acomodar os efeitos das incertezas através da reatualização constante das previsões. Entretanto, esta sucessão de decisões ótimas não leva ao plano mais adequado, pois a decisão a cada estágio só é ótima se ocorrer exatamente o futuro previsto: como a operação considerando esse conhecimento perfeito do futuro é mais eficiente do que se pode de fato alcançar na vida real, a solução encontrada tenderá a utilizar menos geração térmica do que seria recomendável.



Os resultados apresentados em (NETO et al., 1985), a partir da avaliação das três estratégias de operação simulando a operação do sistema com 1000 cenários estocásticos, mostram que o enfoque de programação estocástica resultou nos menores custos esperados: cerca de 65% para o Sudeste e 76% para o Sul em relação aos obtidos com a curva-guia; e 31% para o Sudeste e 5% para o Sul ao se utilizar a estratégia obtida pelo método determinístico. Estes resultados indicam que, para o caso do sistema brasileiro, é importante considerar uma abordagem que leve em conta explicitamente as incertezas das afluências.

## 6.1 Um limite para PPE

Uma das maneiras mais diretas de avaliar se vale a pena considerar a incerteza, (HIGLE, 2005), consiste em comparar o valor ótimo do problema estocástico com o valor ótimo do problema determinístico (em geral resultante da substituição das variáveis aleatórias pelo seu valor esperado). Como visto em 3.2.2, a estrutura geral do problema de dois estágios com recurso é:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] \} \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}, \xi) = \min_y \quad & \{ \mathbf{q}^\top \mathbf{y} \} \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{Wy} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Nesta formulação,  $\xi(\omega)$  é um vetor aleatório onde alguns ou todos os seus elementos ( $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{W}$ ) podem ser aleatórios. A função  $Q(\mathbf{x}, \xi)$  é definida como a função valor do problema de segundo estágio. Note que  $\mathbf{x}$  aparece no lado direito deste problema de minimização, cujo dual é dado por:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}, \xi) = \max \quad & \pi^\top (\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}) \\
\text{s/a} \quad & \pi^\top \mathbf{W} \leq \mathbf{q} \\
& \pi \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

A partir desta representação dual, pode-se verificar que  $Q(\mathbf{x}, \xi)$  é uma função convexa linear por partes da variável  $\mathbf{x}$ . Se o espaço amostral de  $\omega$  é enumerável, com um número finito de realizações  $\xi_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , cada uma com probabilidade  $p_k$ , o valor esperado desta função, que aparece em (6.1), é dado por:

$$\mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] = \sum_{k=1}^K p_k Q(\mathbf{x}, \xi_k),$$

onde  $Q(\mathbf{x}, \xi_k)$  é uma função convexa em  $\xi_k$  quando o problema (6.2) é de recurso fixo, i.e., a matriz  $\mathbf{W}$  de restrições do problema de segundo estágio é fixa, e os coeficientes  $\mathbf{q}$  são também fixos. (Este é o caso dos problemas de planejamento da operação a médio prazo).

Se o problema (6.2) é de recurso fixo, i.e., a matriz  $\mathbf{W}$  de restrições do problema de segundo estágio não está sujeita à incertezas (é fixa), e os coeficientes  $\mathbf{q}$  são também fixos,  $Q(\mathbf{x}, \xi_k)$  é uma função convexa em  $\xi_k$ . (Este é o caso dos problemas de planejamento da operação a médio prazo.)

Pela desigualdade de Jensen, se  $Q(\mathbf{x}, \xi_k)$  é convexa em  $\xi_k$  e  $\xi(\omega)$  é uma variável aleatória, então:

$$Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \leq \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))].$$

Se  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  é o conjunto das soluções viáveis para o primeiro estágio então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) & \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\
\Rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \} & \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] \}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

A desigualdade (6.3) indica uma relação entre dois problemas diferentes, mas relacionados. No lado esquerdo da desigualdade, os valores aleatórios estão substituídos pelos correspondentes valores esperados – este problema determinístico é o chamado problema de valor médio (PVM). No lado direito da desigualdade temos o

problema de programação linear estocástico (PPE). O que esta desigualdade mostra é que o valor ótimo do problema estocástico é limitado inferiormente pelo valor ótimo do problema de valor médio.

Seja

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &\in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \} \\ \mathbf{x}^* &\in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))] \}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (6.3),

$$\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + Q(\bar{\mathbf{x}}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}^*, \xi(\omega))].$$

Além disso, como  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , vale:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}^*, \xi(\omega))] \leq \mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + \mathbb{E}[Q(\bar{\mathbf{x}}, \xi(\omega))].$$

Combinando as duas desigualdades acima, temos:

$$\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + Q(\bar{\mathbf{x}}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}^*, \xi(\omega))] \leq \mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + \mathbb{E}[Q(\bar{\mathbf{x}}, \xi(\omega))]. \quad (6.4)$$

## 6.2 Procedimento de avaliação

As desigualdades (6.4) constituem uma espécie de “teorema do sanduíche” para o valor da solução do problema estocástico e sugerem um método razoavelmente direto para determinar rapidamente se vale a pena resolver o problema estocástico ou se a solução do problema de valor médio é adequada, conforme o procedimento descrito a seguir.

**Passo 1** Resolva o problema determinístico de valor médio:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]) \};$$

e obtenha o valor ótimo do problema  $\bar{z}^*$  e o vetor de solução  $\bar{\mathbf{x}}$ ; e

**Passo 2** Avalie  $\mathbb{E}[Q(\bar{x}, \xi(\omega))]$ , calculando a solução do problema de segundo estágio para todos os cenários  $\xi_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , considerando fixado o vetor de solução  $\bar{x}$ :

$$\mathbb{E}[Q(\bar{x}, \xi(\omega))] = \sum_{k=1}^K p_k Q(\bar{x}, \xi_k)$$

**Passo 3** Calcule a diferença:

$$\mathbb{E}[Q(\bar{x}, \xi(\omega))] - Q(\bar{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)]).$$

Se este valor for suficientemente pequeno,  $\bar{x}$  é uma solução aceitável para o problema estocástico.

### 6.3 Aplicação

A importância de se considerar a incerteza no problema de planejamento de médio prazo da operação está ilustrada no caso exemplo a seguir. Os dados baseiam-se nas configurações dos PMOs do ano de 2003 para os meses de fevereiro (período úmido), maio (início do período seco), agosto (período seco) e novembro (início do período úmido), cujas características constam da Tabela 5.2, página 72.

Para condição de contorno de fim de horizonte utilizou-se como função de custo futuro uma tabela de valor da água, conforme Tabela 6.1, página 139. Esta tabela considera para valores de armazenamento muito baixos (menores do que 99% de energia armazenada total em cada subsistema) um valor da água da ordem do custo de déficit.

|                |      |      |     |     |     |     |     |     |    |     |
|----------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| EARM (%)       | 1    | 20   | 30  | 40  | 50  | 60  | 70  | 80  | 90 | 100 |
| Custo (\$/MWh) | 2500 | 1364 | 909 | 500 | 227 | 182 | 145 | 114 | 91 | 5   |

Tabela 6.1: Custo futuro (\$/MWh) em função da energia armazenada percentual ao final do horizonte de planejamento (EARM)

[Fonte: elaboração própria]

Os cenários determinísticos utilizados para calcular  $Q(\bar{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$  para cada um dos meses considerados foram obtidos considerando os valores teóricos associados

à distribuição log-normal de dois parâmetros, assumida como uma representação adequada para as vazões afluentes às usinas hidroelétricas.

O cálculo de  $\mathbb{E}[Q(\bar{x}, \xi(\omega))]$  foi feito a partir de uma amostra de **81** valores de vazões afluentes obtidas com a técnica de redução de cenários baseada em discretização do espaço de estados a partir de componentes principais.

A Tabela 6.2, página 141, apresenta os valores das soluções obtidas para os casos mencionados acima. O erro relativo está calculado como a diferença entre os limites superior e inferior, relativamente ao limite inferior. Este erro relativo representa a perda de otimalidade quando se utiliza a solução associada ao problema de valor médio  $\bar{x}$  no lugar da solução associada ao problema estocástico  $x^*$ . A Figura 6.1, página 142, ilustra os valores da solução do problema de valor médio (problema determinístico),  $c^\top \bar{x} + Q(\bar{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$ , da solução estocástica,  $c^\top x^* + \mathbb{E}[Q(x^*, \xi(\omega))]$ , e o valor esperado utilizando a solução determinística,  $\bar{x}$ , para todos os cenários  $\xi(\omega)$   $c^\top \bar{x} + \mathbb{E}[Q(\bar{x}, \xi(\omega))]$ . Pode-se notar que as diferenças são significativas, conforme pode ser comprovado na Tabela 6.2, página 141.

A grande variabilidade dos custos totais esperados está de acordo com a situação dos reservatórios do sistema interligado: ao final dos meses de fevereiro e maio, os reservatórios encontram-se com energia armazenada elevada, enquanto que para o final dos meses de agosto e novembro, o sistema encontra-se mais vazio, como pode ser visto na Tabela 6.3, página 141. Nesta avaliação considera-se apenas um problema de dois estágios, e o valor esperado do custo futuro de operação fica dependente da situação imediata dos reservatórios. Enfatiza-se, desta forma, a necessidade de que este problema seja tratado como multi-estágio.

A Figura 6.2, página 143, apresenta os correspondentes custos relativos, padronizados em relação a  $c^\top \bar{x} + Q(\bar{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$ , i.e., considerando para cada mês a solução do problema de valor esperado  $c^\top \bar{x} + Q(\bar{x}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$  igual a 1. Pode-se ver que o PVM sempre subestima os custos esperados para todos os casos estudados, sendo o erro relativo pequeno exceto para o mês de fevereiro, quando a diferença chega a cerca de 12%. Isto pode levar pensar que a solução determinística é aceitável, e que considerar o problema estocástico não compensa o esforço associado. Por outro lado, observa-se que o valor da solução associada ao problema estocástico encontra-se pró-

| Caso  | fev 2003     | mai 2003     | ago 2003     | nov 2003      |
|---|--------------|--------------|--------------|---------------|
| PVM   |              |              |              |               |
| $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}}$  | 98 818,11    | 249 004,18   | 593 561,46   | 566 441,64    |
| $Q(\bar{\mathbf{x}}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$  | 2 663 538,29 | 3 648 851,50 | 9 245 828,03 | 14 060 703,99 |
| $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + Q(\bar{\mathbf{x}}, \mathbb{E}[\xi(\omega)])$ (1) | 2 762 356,23 | 3 897 855,68 | 9 839 389,49 | 14 627 145,63 |
| PPE   |              |              |              |               |
| $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*$  | 110 260,87   | 247 759,57   | 618 851,49   | 585 734,69    |
| $\mathbb{E}[Q(\mathbf{x}^*, \xi(\omega))]$  | 2 975 776,28 | 3 705 589,01 | 9 290 511,52 | 14 412 758,79 |
| $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}^*, \xi(\omega))]$             | 3 086 037,15 | 3 953 348,58 | 9 909 363,01 | 14 998 493,48 |
| $\mathbb{E}[\text{PVM}]$  |              |              |              |               |
| $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}}$  | 98 818,11    | 249 004,18   | 593 561,46   | 566 441,64    |
| $\mathbb{E}[Q(\bar{\mathbf{x}}, \xi(\omega))]$  | 3 013 382,28 | 3 706 487,78 | 9 319 460,66 | 14 434 768,10 |
| $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} + \mathbb{E}[Q(\bar{\mathbf{x}}, \xi(\omega))]$ (2) | 3 112 200,39 | 3 955 491,96 | 9 913 022,11 | 15 001 209,74 |
| Erro relativo (%)   |              |              |              |               |
| $\left(100 \times \frac{(2)-(1)}{(1)}\right)$   | 12,665       | 1,479        | 0,748        | 2,557         |
| $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* - \mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}}$                     | 11 442,76    | -1 244,61    | 25 290,03    | 19 293,05     |
| PPE - PVM   | 323 680,92   | 55 492,90    | 69 973,52    | 371 347,85    |
| $\mathbb{E}[\text{PVM}] - \text{PPE}$   | 26 163,24    | 2 143,38     | 3 659,10     | 2 716,26      |

Tabela 6.2: Limites baseados na solução de valor esperado – (custos em  $10^3\$$ )

[Fonte: elaboração própria]

| Subsistema | fev 2003 | mai 2003 | ago 2003 | nov 2003 |
|------------|----------|----------|----------|----------|
| SE         | 68       | 79       | 64       | 40       |
| S          | 88       | 68       | 55       | 45       |
| NE         | 48       | 50       | 35       | 19       |
| N          | 49       | 93       | 73       | 27       |

Tabela 6.3: Energia Armazenada (%)

[Fonte: elaboração própria]

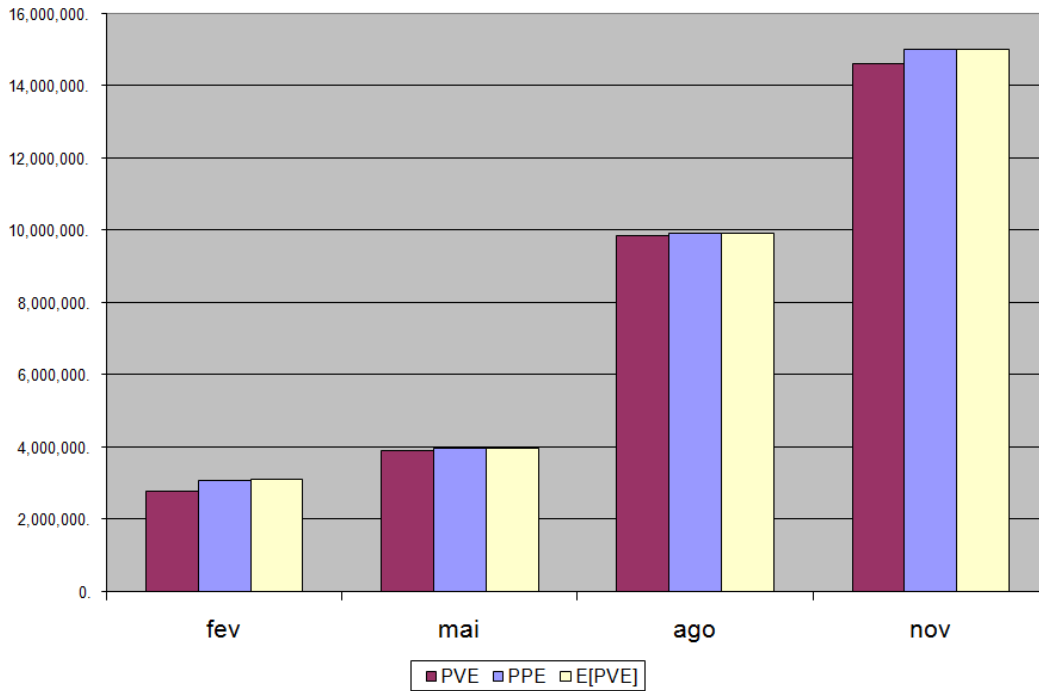


Figura 6.1: Custos de operação ( $10^3$  \$)

[Fonte: elaboração própria]

ximo ao limite superior do intervalo definido pela desigualdade da equação (6.4), o que indica que a solução do problema determinístico é, de fato, otimista, i.e., indica custos de operação menores do que aqueles que serão incorridos em média, e que as medidas de precaução recomendadas pela solução estocástica não podem ser menosprezadas.

A Figura 6.3, páginas 144 e 145, apresenta as distribuições dos custos obtidos quando se aplica a solução de primeiro estágio  $\bar{x}$  do problema determinístico (PVM) e a solução  $x^*$  do problema estocástico (PPE) para todos os cenários do segundo estágio, considerando uma amostra de 81 valores de vazões afluentes obtidas pelo método ACP. Em cada figura também se destaca o custo associado à solução do problema de segundo estágio utilizando o valor esperado dos cenários. Pode-se notar que a solução determinística sempre subestima o custo médio que será incorrido. Por exemplo, para o caso de fevereiro, há uma frustração de expectativa: em cerca de 65% dos cenários este custo será maior. Por sua vez, o custo médio estimado pela solução estocástica será ultrapassado apenas em cerca de 35% dos cenários, o que significa que o planejador está melhor protegido contra ocorrências desfavoráveis

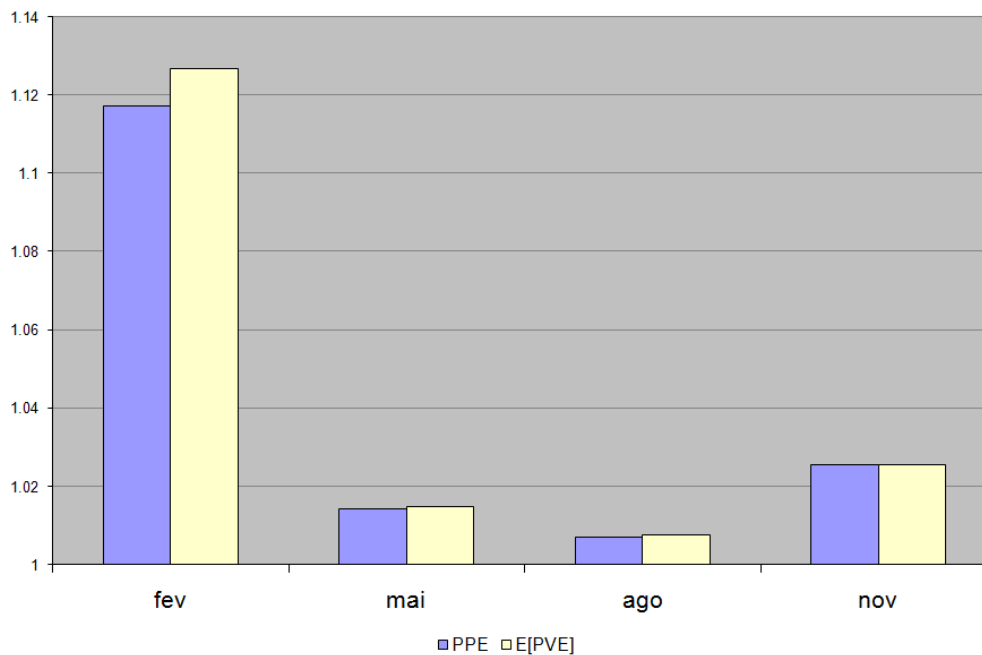


Figura 6.2: Custo relativo (PVM = 1)

[Fonte: elaboração própria]

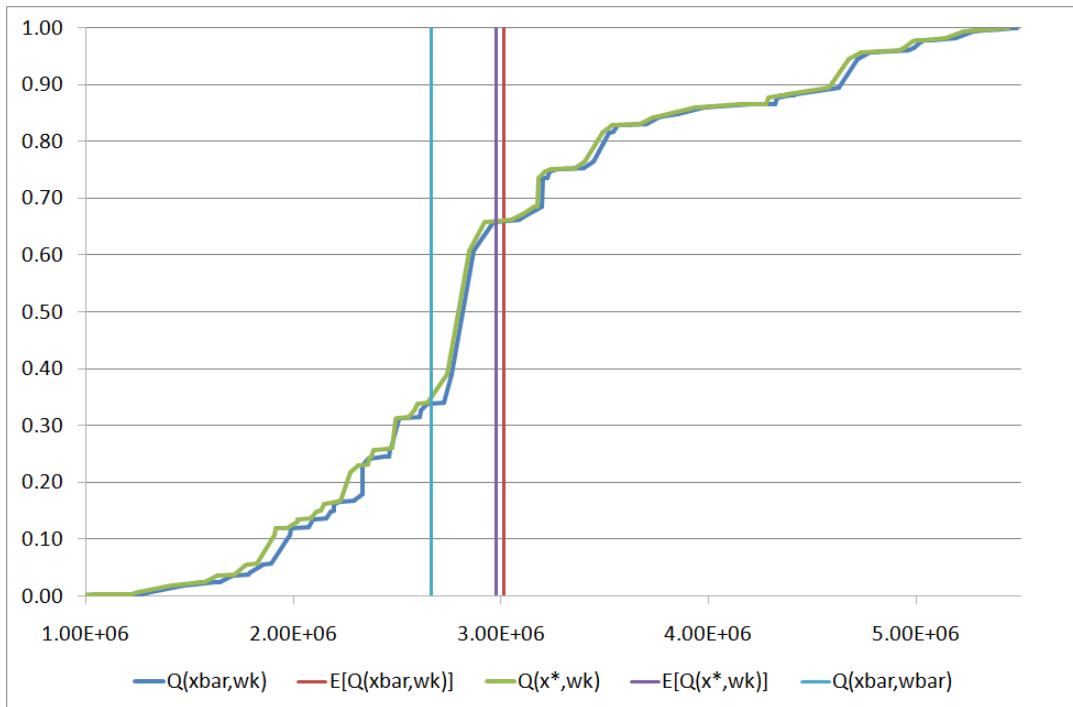
caso opte por utilizar a estratégia sugerida pelo PPE. A Tabela 6.4, página 146, apresenta alguns descritores das distribuições dos custos obtidos. Pode-se verificar que, para estes casos, as distribuições empíricas dos custos simulados são bastante semelhantes.

Por sua vez, as diferenças, em valores absolutos, entre os custos imediatos de operação, obtidos pelas soluções estocásticas e determinísticas, não podem ser menosprezadas: elas variam desde  $-1\,244,61 \times 10^3\$$  para o caso de maio (a solução do problema estocástico resulta em um custo imediato menor) até  $25\,290,04 \times 10^3\$$  para o mês de agosto.

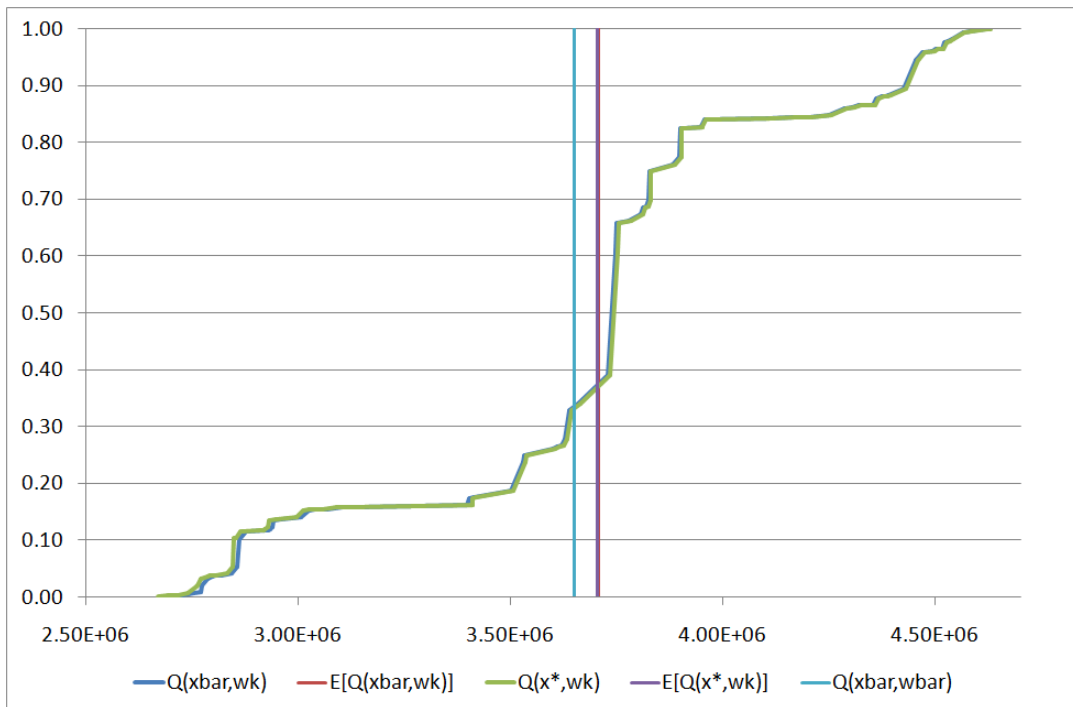
## 6.4 Valor esperado da informação perfeita

A avaliação da adequação de se considerar o problema de planejamento como estocástico pode ser feita de outras formas. Por exemplo, utilizando o conceito *valor esperado da informação perfeita* (EVPI), que mede quanto é razoável pagar para obter informação perfeita acerca do futuro. Para tanto, supõe-se que as vazões





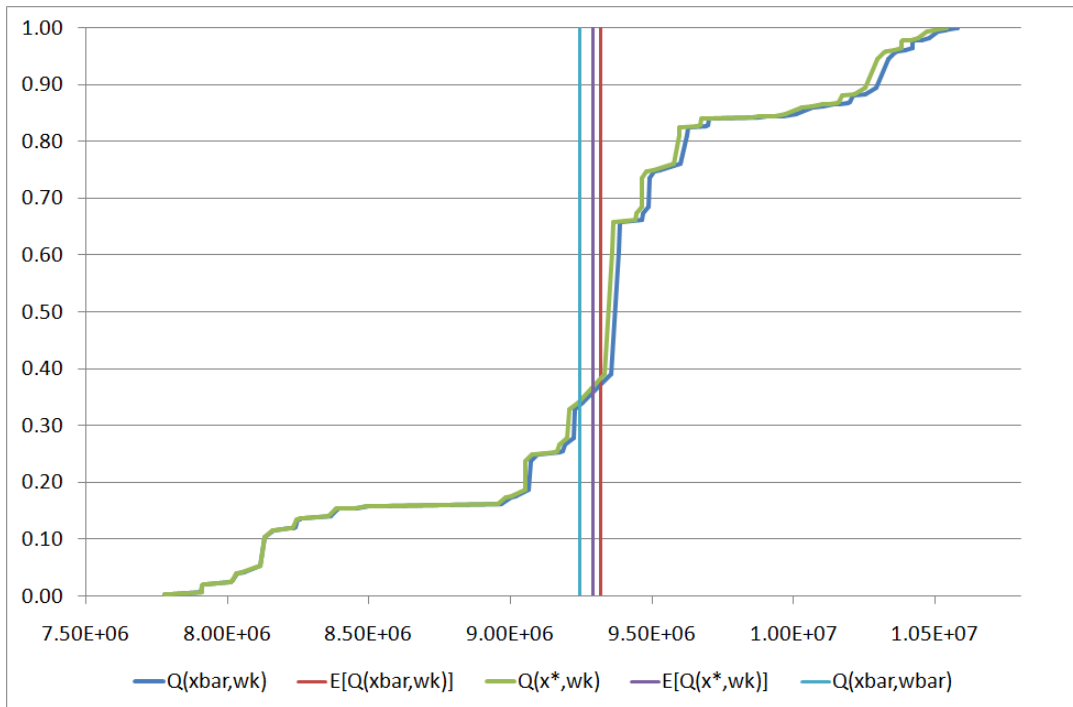
(a) Fevereiro



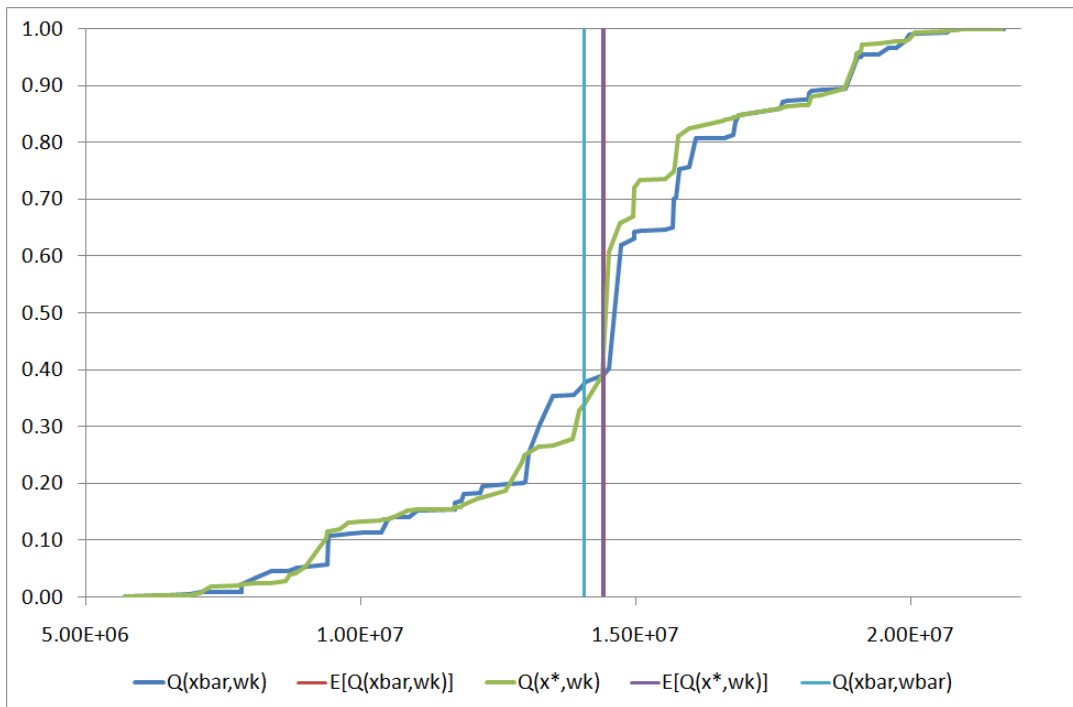
(b) Maio

Figura 6.3: Distribuição dos custos de segundo estágio segundo as soluções ótimas determinística e estocástica (1/2)

[Fonte: elaboração própria]



(c) Agosto



(d) Novembro

Figura 6.3: Distribuição dos custos de segundo estágio segundo as soluções ótimas determinística e estocástica (2/2)

[Fonte: elaboração própria]

| Caso                     | fev 2003     | mai 2003     | ago 2003      | nov 2003      |
|--------------------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| PPE                      |              |              |               |               |
| média                    | 2 975 776,47 | 3 705 593,38 | 9 290 511,72  | 14 412 760,39 |
| desvio padrão            | 882 279,80   | 459 798,08   | 624 419,49    | 2 945 990,00  |
| máximo                   | 5 439 914,78 | 4 625 902,91 | 10 530 309,39 | 21 649 014,81 |
| mínimo                   | 965 648,00   | 2 668 982,12 | 7 772 671,39  | 5 703 451,11  |
| coef. variação           | 0,30         | 0,12         | 0,07          | 0,20          |
| $\mathbb{E}[\text{PVM}]$ |              |              |               |               |
| média                    | 3 013 382,28 | 3 706 487,78 | 9 319 460,66  | 14 434 768,10 |
| desvio padrão            | 878 112,19   | 455 353,79   | 635 330,28    | 2 945 386,91  |
| máximo                   | 5 484 006,95 | 4 625 756,34 | 10 577 697,30 | 21 694 462,90 |
| mínimo                   | 965 629,66   | 2 685 173,95 | 7 777 641,85  | 5 723 452,01  |
| coef. variação           | 0,29         | 0,12         | 0,07          | 0,20          |

Tabela 6.4: Distribuição dos valores ótimos ( $10^3$  \$)

[Fonte: elaboração própria]

futuras são conhecidas e resolve-se o problema de despacho ótimo para cada um dos cenários possíveis. Este enfoque, no qual as decisões são tomadas para cada cenário em particular, é conhecido como enfoque “sob medida” (wait and see). Na realidade, essas políticas são não-implementáveis, pois as afluências não são conhecidas de antemão. No entanto, estes cálculos são utilizados para calcular o índice EVPI, que é a diferença entre o valor esperado do custo da solução obtida na solução do problema estocástico PPE e o valor esperado dos custos de cada uma das soluções obtidas sob medida para cada um dos cenários considerados, aqui denotado  $WS$ . Se o EVPI é nulo, não há ganho em se conhecer antecipadamente as afluências, se for pequeno significa que as incertezas tem um papel menor no problema. Para o problema de planejamento da operação, onde apenas o lado direito das equações é aleatório (vazões afluentes) vale a seguinte relação (BIRGE; LOUVEAUX, 1997):

$$\text{PVM} \leq \text{WS} \leq \text{PPE}$$

Esta abordagem foi utilizada no caso estudo apresentado em (OLIVEIRA; COSTA, 2002), a partir de dados do SIN de uma configuração baseada no no PMO de janeiro

de 2002, considerando um problema de dois estágios. Os cenários de afluências foram obtidos usando uma amostra de 1000 valores iid. O valor ótimo encontrado na solução do problema estocástico (PPE) foi  $35\,183 \times 10^3\$$ , enquanto que a solução do problema considerando o valor esperado das afluências (PVM) foi  $31\,247 \times 10^3\$$ , cerca de 10% menor. Por sua vez, o cálculo de WS resultou em  $31\,753 \times 10^3\$$ , próximo a PVM. Assim, EVPI resulta neste caso em  $35\,183 - 31\,753 = 3\,430 \times 10^3\$$ , cerca de 10% de PPE. Este resultado indica que, para o problema de planejamento da operação, as incertezas acerca das afluências futuras devem ser levadas em conta.

# Capítulo 7

## Conclusão

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é um problema de tomada de decisões sob incertezas. Este problema pode ser formulado com um modelo de programação estocástica, que trata explicitamente as incertezas quantificáveis em um modelo de otimização. Exceto em casos muito particulares, não é possível resolver este problema de forma analítica, sendo necessário recorrer a uma representação discreta das incertezas. De forma a viabilizar a sua solução em termos de tempo computacional do método de solução do problema, esta representação discreta deve considerar um número limitado de realizações.

Este trabalho apresentou uma proposta para tratamento da representação das incertezas em modelos de programação estocástica baseada em árvores de cenários de tamanho limitado porém representativo. O problema estocástico que se tem em vista é o problema de planejamento da operação de médio prazo de sistemas hidrotérmicos interligados, com horizonte de até seis meses, no qual a incerteza tratada é a incerteza das fluências.

Inicialmente, estabeleceu-se para esta árvore uma estrutura orientada pela consideração de que, para a solução do problema em foco, é mais relevante representar em maior detalhe as alternativas de cenários nos estágios iniciais de decisão, não havendo perda significativa de informação pela maior agregação dos cenários dos estágios mais distantes do instante de interesse, que é o primeiro estágio.

Para chegar a um compromisso entre a necessidade de parcimônia da amostra

e uma representação adequada dos cenários, foram consideradas duas alternativas para diminuir a cardinalidade da amostra de cenários, ambas a partir da redução da dimensão do vetor que representa uma observação na amostra. A primeira, (método de agregação) considera como eixos de agregação as energias naturais afluentes aos subsistemas, obtidas pela transformação das vazões afluentes. A segunda, (método das componentes principais), utiliza a técnica de análise de componentes principais, ACP, para obter uma redução da dimensão diretamente no espaço de vazões. Uma vez reduzida a dimensionalidade do espaço de estados, a diversidade espacial é capturada pela combinação de padrões alto (A), médio (M) e baixo (B) nos eixos de agregação, resultando em representantes de classes n-variadas  $(A, M, B)^n$  ou  $(A, B)^n$ , onde  $n$  é o número de eixos.

Cabe notar que, embora voltada para problemas de planejamento da operação, a abordagem proposta pode ser aplicada para outros problemas estocásticos, notadamente aqueles para os quais se pode imaginar que uma representação adequada das incertezas consiste em obter “proxis” para as condições de realizações associadas a eventos acima da média, na média e abaixo da média.

Para o método de agregação a partir de amostras *iid*, foram consideradas três alternativas para construção desta árvore: análise de conglomerados usando o algoritmo *k*-Means, redução ótima de cenários baseada em métrica de probabilidades e uso de amostragem estratificada (método reticulado). O método de discretização via análise de componentes principais prescinde de amostragem aleatória e consiste na seleção de representantes no espaço dos ruídos mapeado em eixos independentes definidos pelas  $p$  componentes principais associadas aos  $p$  maiores autovalores. Dentre estes métodos, os que apresentaram melhor desempenho, em termos de uso no modelo de otimização, para os casos estudados foram os métodos de ACP e o de amostragem estratificada. O método de amostragem estratificada tem a vantagem de possibilitar que sejam realizados estudos baseados em métodos de Monte Carlo, como por exemplo, avaliação da estabilidade do valor da função objetivo e da solução obtida considerando agregações a partir de diferentes amostras *iid*.

Por sua vez, o método das Componentes Principais não faz uso de uma amostra sintética gerada e é de rápida execução. Neste método discretiza-se o espaço de

estados dos ruídos em células de um reticulado uniforme com poucos componentes. No entanto, a obtenção de amostras diferentes para subsidiar estudos do tipo Monte Carlo fica restrita a variações limitadas do procedimento de definição de novas amostras. Uma possibilidade de desenvolvimento futuro seria usar o método de componentes principais em conjunto com um sorteio aleatório do vetor de resíduos (ou seja, juntando a ACP com, por exemplo, o método reticulado) em vez de trabalhar com ENAs. Outras combinações das abordagens propostas também poderiam ser investigadas, tais como mapear o espaço das ENAs no espaço das componentes principais e discretizar os eixos ortogonais assim definidos, ou então realizar sorteios de ruídos independentes nestes eixos ortogonais etc.

As conclusões deste trabalho estão baseadas em resultados obtidos a partir de análises de estudos de caso. Não existe uma demonstração analítica que possa fornecer indicação da adequação da representação das incertezas que se deva adotar para todo tipo de problema estocástico, e tampouco para o problema em questão. Assim, estudos adicionais devem ser realizados com vistas a avaliar um conjunto maior de casos de forma a apoiar as indicações aqui feitas. Entretanto, não se espera que estes estudos adicionais venham de qualquer forma invalidar as conclusões deste trabalho.

Os estudos reportados indicam que uma estrutura de árvore baseada em representação de combinações de eventos Altos, Médios e Baixos, considerando quatro eixos de agregação (os quatro subsistemas usualmente considerados na representação do SIN ou os quatro componentes principais mais representativos) e que resulta em  $3^4 = 81$  cenários para o primeiro estágio estocástico, é suficiente para fornecer resultados com precisão e estabilidade adequadas. Adicionalmente, a consideração de apenas dezesseis cenários para o primeiro estágio estocástico, referente a combinações de cenários A e B, acarreta um viés no valor da solução ótima, cf. 5.4.8.1. Já a consideração de um número maior que 81 cenários não agrega informação relevante que compense o esforço computacional adicional, conforme item 5.1. Cabe notar que, no caso de cenários associados ao *segundo* estágio estocástico, considerar apenas 16 cenários não é necessariamente uma limitação de representatividade: como o processo de geração é condicionado à realização anterior, valores próximos ao valor central também manterão as características dos seus predecessores: valores altos

tendem a ter valores centrais elevados, valores médios tendem a ter representantes centrais médios e valores baixos tendem a ter representantes baixos. Os valores centrais (próximos à média da distribuição condicionada) tendem a ser próximos ao valor médio: se este for um valor elevado, a média condicionada também tenderá a ser. Uma comprovação experimental desta afirmativa foi apresentada nos estudos referentes ao problema com dois estágios estocásticos, no qual verificou-se que os resultados obtidos com uma árvore com estrutura  $81 \times 16$  apresentaram resultados próximos ao cenário de referência considerado  $81 \times 81$ .

A técnica de agregação usando  $k$ -Means não apresentou os melhores resultados com relação à estabilidade do valor ótimo do problema de otimização para os casos estudados. Isto pode ser explicado pelo fato de que neste método, caso a amostra de valores a serem classificados possua algum valor discrepante (outlier), gerado por puro acaso logo entre os primeiros valores da amostra  $iid$ , este será um elemento isolado que tenderá a ser classificado como representante de si mesmo. Entretanto, a probabilidade de sua ocorrência estará claramente mal estimada e implicará em distorção na solução proposta pelo problema de otimização. Assim, recomenda-se que, para aplicação deste método, o tamanho da amostra  $iid$  a ser gerada seja suficientemente elevado. Esta recomendação, entretanto, tem um elevado impacto no esforço computacional necessário para resolver o problema de agregação: enquanto amostras  $iid$  de tamanho 1000 são agregadas em 81 representantes em cerca de 20 segundos, para amostras de 4000 o tempo passa a 20 minutos e para amostras de tamanho 10000 o algoritmo consome cerca de 5 horas e 20 minutos em um micro computador Pentium IV com 2,66GHz e 512MB de memória RAM. Recomenda-se também proceder a análises de sensibilidade da agregação com relação a diferentes pontos iniciais fornecidos ao algoritmo  $k$ -Means, questão não foi investigada nesta tese, ou então considerar a alternativa  $k$ -Medoids que, ao invés de tomar o valor médio como referência usa o “medoid”, que é o ponto mais centralmente localizado na classe e é mais robusto que o algoritmo  $k$ -Means na presença de valores discrepantes.

Adicionalmente, os estudos reportados em 5.3.1 mostram que, malgrado o bom ajuste dos representantes selecionados à distribuição marginal condicionada  $iid$  em cada um dos eixos de agregação, ocorrem “falhas” no recobrimento do espaço amostral a partir dos representantes selecionados, o que pode justificar o desempenho



insatisfatório destes cenários, em termos de estabilidade dos resultados, quando empregados no modelo de otimização, cf. item 5.4. Este fato corrobora o pressuposto de que a seleção de cenários para uso em modelo de programação estocástica não deve ser guiada apenas por critérios estatísticos de adequação de ajuste entre os representantes e os representados: a representação dos dados é uma questão que deve ser tratada como parte da modelagem do problema. Em outras palavras, uma “boa” representação da incerteza está condicionada ao problema de otimização a ser resolvido.

Os representantes selecionados pelo método de redução recursiva, quando fornecidos ao problema de otimização, apresentam desempenho semelhante àqueles obtidos com os representantes selecionados utilizando  $k$ -Means, apesar da fundamentação matemática que justifica o seu uso, que se baseia em uma analogia entre métrica de probabilidades para avaliar a distância entre distribuições e o problema de transporte de massa. Uma possível explicação para este desempenho é que esta técnica não tem qualquer compromisso em preservar características da distribuição de probabilidades, como média e desvio padrão condicionados e o problema de planejamento de programação de médio prazo é diferente do problema de transporte de massa. A utilização de implementações disponibilizadas pelos autores do método confirma os resultados obtidos.

O método de amostragem estratificada parte do princípio de que os representantes serão escolhidos como os pontos centróides das classes previamente definidas e portanto, por construção, os valores extremos estão descartados. Esta é uma abordagem que tem os mesmos pressupostos que embasam a utilização da mediana ao invés da média: os valores são menos influenciados pelos eventos extremos. Os estudos indicam que é conveniente considerar amostras *iid* com tamanho mínimo 3000, o que não se traduz em impacto para o algoritmo de seleção de cenários: os tempos de processamento variaram entre 17 segundos para amostras de 3000 até 1 minuto e 40 segundos para amostras de 10000. Vale mencionar que a escolha do centróide da classe como representante é arbitrária. Seria possível utilizar outros representantes, como, por exemplo, a mediana dos pontos que pertencem a cada classe.

O método de amostragem estratificada apresenta, adicionalmente, a vantagem

de poder ser utilizado para selecionar cenários gerados a partir de modelos de geração que sejam não paramétricos. Esta característica pode ser interessante para obter um recobrimento ordenado de cenários que foram obtidos a partir de modelos que utilizam técnicas não paramétricas. Este tipo de abordagem pode se tornar progressivamente mais importante na medida em que as técnicas voltadas a mineração de dados (data mining) estão se tornando bastante populares e modelos não paramétricos tendem a ser mais freqüentemente propostos. Como exemplo desta tendência, podemos citar modelos de geração de cenários de afluições, como o recentemente proposto por (MEJÍA, 2007). Para este modelo, os ruídos utilizados são aqueles resultantes da diferença entre a previsão obtida e o valor verificado (esta diferença muitas vezes é chamada de “inovação”), aos quais não se ajusta qualquer distribuição.

Devido às variações amostrais, fica evidente que a utilização de uma amostra puramente aleatória de tamanho limitado não constitui uma aproximação adequada para a solução do problema, como está detalhado no item 5.1. Para se ter a mesma estabilidade dos resultados propiciados pelas amostras seletivas recomendadas neste trabalho, o número de cenários a ser considerado resulta muito elevado.

Os melhores resultados em termos de aderência às distribuições de probabilidades condicionadas das amostras reduzidas vis-à-vis às amostras *iid* de tamanho elevado e de preservação dos momentos amostrais condicionados foram obtidos com os métodos de amostragem estratificada e de redução usando componentes principais. A distribuição condicionada das energias naturais afluentes aos subsistemas dos representantes selecionados ficou melhor ajustada para os métodos *k*-Means e redução recursiva. Para os métodos de redução via componentes principais e amostragem estratificada, a distribuição marginal condicionada para o Sudeste apresenta degraus. Cabe ressaltar que não estamos interessados apenas em obter a melhor representação em termos hidrológicos, mas sim verificar o desempenho dos cenários fornecidos pelos métodos quando utilizados no modelo de otimização. Os resultados indicam que os cenários selecionados pelos métodos de agregação utilizando reticulado e de discretização via ACP apresentam os melhores desempenhos quando aplicados ao modelo de otimização. Desta forma, recomenda-se utilizar estes métodos que atendem ao objetivo da representação das incertezas, ou seja, produzem

árvores representativas e de tamanho limitado e que apresente resultados estáveis e próximos do ótimo “verdadeiro” quando utilizadas nos modelos desenvolvidos para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de médio prazo.

Cabe observar que ao modelar o fenômeno físico, parte-se de alguns pressupostos implícitos e não questionados, tais como que a adequação do modelo estocástico adotado para representá-lo. Embora o uso de distribuições log-normais e modelos auto-regressivos sejam comuns em hidrologia, na verdade, não se conhece perfeitamente a família de distribuições nem tampouco o processo estocástico subjacente. Uma alternativa que evita a utilização de informações subjetivas é usar a distribuição empírica obtida do histórico disponível, mas então devemos abrir mão de qualquer metodologia que faça uso do conhecimento da distribuição. Outra questão que se coloca é se o passado constitui uma descrição adequada do futuro. Estas limitações são, de fato, inerentes a qualquer processo de modelagem e, em particular, à programação estocástica. Assim, a questão de qualificar os processos de geração de cenários deve ser encarada com a devida precaução.

Embora não tenha sido discutido nesta tese, cabe ressaltar que as soluções fornecidas por modelos de programação estocástica (assim como soluções fornecidas a partir do uso de qualquer outra abordagem) devem ser utilizadas com a devida precaução: todo modelo é uma simplificação da realidade e as suas soluções não devem ser imediatamente implementadas sem análises adicionais. Esta observação é ainda mais relevante no caso do atual marco regulatório do Setor Elétrico brasileiro, no qual divergências acerca das soluções propostas por modelos de otimização, embora justificadas devido a considerações adicionais que não estão presentes na formulação do modelo, são de difícil implementação. Cabe mencionar que, em que pese a importância da consideração das soluções providas pelos modelos de programação matemática, estes resultados devem ser tratados dentro de um sistema de suporte à decisão que incorporem outros aspectos (por vezes não comensuráveis) do problema em tela de forma a subsidiar a tomada de decisão.

Recomenda-se que os estudos reportados nesta tese sejam aprofundados, de forma que, uma vez abonados, passem a subsidiar o processo de tomada de decisão a partir de resultados mais robustos do que aqueles fornecidos sem a consideração

de amostragem seletiva. As metodologias aqui expostas são de fácil implementação e representam um avanço com relação à amostragem puramente aleatória.

Entre os procedimentos que podem ser utilizados, no aprofundamento dos estudos aqui apresentados, podemos citar a técnica de contaminação, proposta por (DUPAČOVÁ, 1990), para avaliar a estabilidade dos resultados face a pequenas variações nas probabilidades dos cenários ou para estudar a inclusão de ramos adicionais em nós específicos da árvore de cenários original. Esta técnica é uma análise pos-otimização, sendo particularmente interessante para tratar a inclusão de cenários específicos, tais como aqueles associados a ocorrência de eventos críticos, que não foram considerados quando da determinação da estratégia de operação ou então para avaliar o impacto decorrente da remoção de algum cenário particular da árvore de cenários original. Esta técnica, que não depende de qualquer hipótese específica acerca da distribuição de probabilidades, fornece limites para o valor da solução ótima face a alterações nas árvores de cenários consideradas.

Como se sabe, o critério de minimizar o valor esperado não é adequado para tratar problemas nos quais a ocorrência de um evento extremo e com baixa probabilidade leva a uma situação irreversível ou com custos demasiadamente elevados. Nestas situações, não faz sentido misturar eventos catastróficos com eventos regulares e tentar otimizar o custo médio: de nada adianta uma estratégia que conduz a decisões ótimas em média se no decorrer do processo pode ocorrer um evento que impeça a sua continuidade. No que diz respeito ao Setor Elétrico brasileiro, há uma insatisfação crescente com o critério de valor esperado, que tem se mostrado um instrumento de gestão inadequado para atender os requisitos de segurança. Para o enfrentamento dessas situações, tem-se recorrido a mecanismos ad hoc que visam incorporar ao modelo atual critérios de aversão a risco. Neste sentido, recomenda-se que sejam estudados outros critérios de otimização, que atendam de modo explícito as demandas do decisor, dentre os quais podemos citar a abordagem baseada em valor condicionado ao risco (CVaR) que se apresenta como uma alternativa metodologicamente defensável.

Adicionalmente, enfatiza-se a que o desenvolvimento autônomo e de forma aberta de modelos de programação matemática e de suporte à decisão, com ampla parti-

cipação dos atores interessados, no qual se possa tratar este e outros critérios de otimização é uma necessidade para avançar numa melhor representação do problema de planeamento da operação de sistemas hidrotérmicos interligados.

# Referências Bibliográficas

ARVANIDITIS, N. V.; ROSING, J. Composite representation of a multireservoir hydroelectric power system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 89, n. 2, p. 319–326, Fevereiro 1970.

BEALE, E. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B (Methodological)*, v. 17, n. 2, p. 173–184, 1955.

BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems. *Numerische Mathematik*, n. 4, p. 238–252, 1962.

BIRGE, J. R. Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs. *Oper. Res.*, v. 33, n. 5, p. 989–1007, 1985. ISSN 0030-364X.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. V. A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. *European J. Oper. Res.*, v. 34, n. 3, p. 384–392, 1988. ISSN 0377-2217.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. V. *Introduction to stochastic programming*. New York: Springer-Verlag, 1997. xx+421 p. ISBN 0-387-98217-5.

BIRGE, J. R.; MULVEY, J. M. Stochastic programming in industrial engineering. In: AVRIEL, M.; GOLANY, B. (Ed.). *Mathematical Programming for Industrial Engineers*. New York: Dekker, 1996. p. 543–574.

BISHOP, Y. M.; FIENBERG, S. E.; HOLLAND, P. W. *Discrete multivariate analysis: Theory and practice*. Cambridge, MA: Springer, 2007. 558 p. ISBN: 0387728058.

- BOX, G.; JENKINS, G.; REINSEL, G. *Time series analysis: Forecasting and control*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. 592 p. ISBN: 0130607746.
- BROOKE, A. et al. *GAMS – A User’s Guide*. Washington D.C. – USA: GAMS Development Corporation, 1998. 276 p.
- CANESTRELLI, E.; GIOVE, S. Scenarios identification for financial time series. In: CANESTRELLI, E. (Ed.). *Current Topics in Quantitative Finance*. Venezia, Itália: Springer, 1999. Apresentado no 21st Euro Working Group on Financial Modelling Conference.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W. Chance constrained programming. *Management Science*, v. 5, p. 73–79, 1959.
- CHEN, Z. L.; POWELL, W. B. Convergent cutting-plane and partial-sampling algorithm for multistage stochastic linear programs with recourse. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 102, n. 3, p. 497–524, 1999. ISSN 0022-3239.
- COSTA, J. P. da et al. Programação estocástica de operação de sistemas hidrotérmicos. In: ABRH. *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. Foz do Iguaçu, PR, Brasil, 1989. Anais I.
- COSTA, J. P. da et al. *Modelo Estratégico de Geração Hidrotérmica a Subsistemas – NEWAVE, Especificação Funcional*. Rio de Janeiro, Brasil, 1993. Relatório Técnico CEPEL 1003/93.
- COSTA, J. P. da; OLIVEIRA, G. C. de; LEGEY, L. F. L. Reduced scenario tree generation for mid-term hydrothermal operation planning. In: PMAPS. *Proceedings of the 9th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*. Estocolmo, Suécia, 2006. p. 1–7. ISBN: 978-91-7178-585-5.
- COSTA, J. P. da et al. *Modelo DECOMP – Termo de Referência do Protótipo*. Rio de Janeiro, Brasil, Janeiro 1994. 9 p. Relatório Técnico CEPEL YEC-059/94.
- DANTZIG, G. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, v. 1, p. 197–206, 1955.
- DASH-OPTIMIZATION. *Xpress - MP: Reference Manual*. 2003. Release 14.

DONOHUE, C. J.; BIRGE, J. R. The abridged nested decomposition method for multistage stochastic linear programs with relatively complete recourse. *Algorithmic Oper. Res.*, v. 1, n. 1, p. 20–30, 2006. ISSN 1718-3235.

DUPAČOVÁ, J. Stability and sensitivity analysis for stochastic programming. *Ann. Oper. Res.*, v. 27, n. 1, p. 115–142, Dezembro 1990. ISSN 0254-5330.

DUPAČOVÁ, J. Stochastic programming: Approximation via scenarios. In: *Proceedings of 3rd Caribbean Conference on Approximation and Optimization*. Puebla, México: EMIS Master Server, 1995. p. 20. [Acesso em 2007-10-20]. Disponível em: <<http://www.emis.de/proceedings/3ICAOC/dupacova.ps.gz>>.

DUPAČOVÁ, J. Scenario-based stochastic programs: resistance with respect to sample. *Ann. Oper. Res.*, v. 64, p. 21–38, 1996. ISSN 0254-5330. Stochastic programming, algorithms and models (Lillehammer, 1994).

DUPAČOVÁ, J. Applications of stochastic programming: achievements and questions. *European J. Oper. Res.*, v. 140, n. 2, p. 281–290, 2002. ISSN 0377-2217. O.R. for a united Europe (Budapest, 2000).

DUPAČOVÁ, J.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for multistage stochastic programs. *Ann. Oper. Res.*, v. 100, n. 1–4, p. 25–53, Dezembro 2000. ISSN 0254-5330. Research in stochastic programming (Vancouver, BC, 1998).

DUPAČOVÁ, J.; GRÖWE-KUSKA, N.; RÖMISCH, W. Scenario reduction in stochastic programming: An approach using probability metrics. *Math. Programming (Ser. A)*, v. 95, n. 3, p. 493–511, Março 2003.

FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A modelling language for mathematical programming*. 2. ed. Pacific Grove, CA, EUA: Duxbury Press, 2002. xxi + 517 p. ISBN: 0-534-38809-4.

GRÖWE-KUSKA, N.; HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems. In: BORGHETTI, A.; NUCCI, C. A.; PAOLONE, M. (Ed.). *IEEE Bologna Power Tech Proceedings*. Bolonha, Itália: [s.n.], 2003. v. 3.



- GUERRERO-SALAZAR, P. et al. Geração de séries hidrológicas mensais para estudos energéticos. In: *Anais do IV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*. Rio de Janeiro,RJ,Brasil: [s.n.], 1977.
- HARTIGAN, J.; WONG, M. A K-Means Clustering Algorithm. *Applied Statistics*, v. 28, n. 1, p. 100–108, 1979.
- HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational Optimization and Applications*, v. 24, n. 2–3, p. 187–206, Fevereiro 2003.
- HIGLE, J. L. Stochastic programming: Optimization when uncertainty matters. *INFORMS Tutorials in Operations Research*, Novembro 2005. [Acesso em 2007-10-18]. Disponível em: <<http://tucson.sie.arizona.edu/faculty/higle/images/pdf/HigleInforms05.pdf>>.
- HINDSBERGER, M.; PHILPOTT, A. B. Resa: A method for solving multistage stochastic linear programs. In: *Magnus Hindsberger. Interconnected hydro-thermal systems Models, methods, and applications, Technical University of Denmark, DTU, Informatics and Mathematical Modelling, IMM-PHD-2003-112*. "Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby": [s.n.], 2001. ISSN 0909-3192. [Acesso em 2007-10-20]. Disponível em: <<http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?2431>>.
- HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science B.V., 1994. xxxvii + 1013 p. [Acesso em 2007-10-22]. Disponível em: <<http://www.stats.uwo.ca/faculty/aim/1994Book/default.htm>>.
- HØYLAND, K.; WALLACE, S. W. Generating scenario trees for multistage decision problems. *Management Science*, v. 47, n. 2, p. 295–307, Fevereiro 2001.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3. ed. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. 299 p. (Projeto Euclides). ISBN: 85-244-0101-X.
- JARDIM, D. L.; MACEIRA, M. E. P.; FALCÃO, D. Stochastic streamflow model for hydroelectric systems using clustering techniques. In: *Proceedings of*

*International Conference on Electric Power Engineering – PowerTech*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. v. 3.

KALL, P.; WALLACE, S. *Stochastic Programming*. 2. ed. Chichester etc.: John Wiley & Sons, 1994. x + 317 p. [Acesso em 2007-10-20]. Disponível em: <<http://home.himolde.no/wallace/manujw.pdf>>.

KAUT, M.; WALLACE, S. W. *Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming*. Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 2003. Stochastic Programming E-Print Series. [Acesso em 2007-10-17]. Disponível em: <<http://edoc.hu-berlin.de/docviews/abstract.php?id=26731>>.

KLEYWEGT, A. J.; SHAPIRO, A.; MELLO, T. H. de. The sample average approximation method for stochastic discrete optimization. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 12, n. 2, p. 479–502, 2002. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SJE/12/479/1>>.

KOTTEGODA, N. T. *Stochastic Water Resources Technology*. 1. ed. [S.l.]: Palgrave Macmillan, 1980. xii+379 p. ISBN: 0-333-22346-2.

LABADIE, J. W. Optimal operation of multireservoir systems: State-of-the-art review. *Journal of Water Resources Planning and Management (ASCE)*, v. 130, n. 2, p. 93–111, Março/Abril 2004. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?QWR/130/93/1>>.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7. ed. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. 357 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN: 85-244-0089-7.

LOUGEE-HEIMER, R. The common optimization interface for operations research: Promoting open-source software in the operations research community. *IBM Journal of Research and Development*, v. 47, n. 1, p. 57–66, Janeiro 2003. [Acesso em 2007-11-21]. Disponível em: <<http://www.research.ibm.com/journal/rd/471/lougee.html>>.

MACEIRA, M. E. P. et al. Hourly generation dispatch representing detailed hydraulic constraints. In: CIGRÉ - BRASIL. *Anais do VII Simpósio de*

*Planejamento e Operação de Sistemas Elétricos de Potência*. Curitiba, PR, Brasil, 2000.

MACEIRA, M. E. P.; PENNA, D. D. J.; DAMAZIO, J. M. Geração de cenários sintéticos de energia e vazão para o planejamento da operação energética. In: ABRH. *Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos (ABRH 2005)*. João Pessoa, PB, Brasil, 2005.

MAHALANOBIS, P. On the generalized distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Science of India*, v. 12, p. 49–55, 1936.

MAKHORIN, A. *GLPK (GNU Linear Programming Kit)*. 2007. [Acesso em 2007-11-21]. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>>.

MASSÉ, P. *Les Réserves et la Régulation de l'Avenir dans la vie Économique Vol. I e II*. Paris: Hermann, 1946. 148, 229 p.

MEJÍA, J. M. Algunas experiencias en previsión de caudales. In: ONS. *Anais do I Workshop – Previsão de Vazões*. Rio de Janeiro, Brasil, 2007. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <[http://www.ons.org.br/download/previsao\\_vazoes/artigos\\_sessao/AT\\_Sessão28.pdf](http://www.ons.org.br/download/previsao_vazoes/artigos_sessao/AT_Sessão28.pdf)>.

NETO, T. de A. A. et al. Comparison of stochastic and deterministic approaches in hydrothermal generation scheduling. In: CUNHA, S. H. F. da (Ed.). *Proceedings of IFAC Symposium on Planning and Operation of Electrical Energy Systems*. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 1985. v. 1, p. 201–206.

OLIVEIRA, G. C. d.; COSTA, J. P. d. Hydrothermal scheduling policy stability under inflow uncertainty. In: *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2002)*. Natal, RN, Brasil: [s.n.], 2002. p. 2331–2336. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <[http://www.psr-inc.com/psr/download/papers/cba\\_02\\_bonsai.pdf](http://www.psr-inc.com/psr/download/papers/cba_02_bonsai.pdf)>.

OLIVEIRA, G. C. d.; COSTA, J. P. d. Seleção de cenários de vazões via componentes principais para o planejamento da operação. In: ABRH. *Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos (ABRH 2005)*. João Pessoa, PB, Brasil, 2005. p. 19. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <[http://www.psr-inc.com/psr/download/papers/abrh05\\_v14.pdf](http://www.psr-inc.com/psr/download/papers/abrh05_v14.pdf)>.

- OLIVEIRA, W. L. de. *Redução Ótima de Cenários em Programação Estocástica. Aplicação às vazões afluentes aos aproveitamentos hidroelétricos*. Dissertação (Mestrado) — IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto 2007.
- PEREIRA, M. V. F. Optimal scheduling of hydrothermal systems—an overview. In: CUNHA, S. H. F. da (Ed.). *Proceedings of IFAC Symposium on Planning and Operation of Electrical Energy Systems*. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 1985. v. 1, p. 1–9.
- PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. *Electrical Power & Energy Systems*, v. 11, n. 3, p. 161–169, Julho 1989.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Operating planning of large-scale hydroelectrical systems. In: *Proceedings of 8th Power System Computation Conference*. Helsinki, Finland: [s.n.], 1984.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system—a decomposition approach. *Water Resources Research*, v. 21, n. 6, p. 779–792, 1985.
- PHILPOTT, A. B.; GUAN, Z. *On the convergence of sampling-based methods for multi-stage stochastic linear programs*. Electric Power Optimization Centre, Setembro 2007. EPOC publications. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <<http://www.esc.auckland.ac.nz/EPOC/publications.html>>.
- PSR. *Conceitos e metodologias usados para geração de árvores de cenários de vazões multivariadas*. Rio de Janeiro, Brasil, Outubro 2004. [Acesso em: 2007-11-20]. Disponível em: <<http://www.psr-inc.com.br/reports.asp>>.
- PSR. *Modelo BONSAI – Árvore de Cenários de Vazões Multivariadas – Descrição Metodológica*. Rio de Janeiro, Brasil, Outubro 2004.
- RACHEV, S.; RÜSCHENDORF, L. *Mass Transportation Problems*. 1. ed. Berlin: Springer, 1998. 540, 430 p. (Probability and its Applications, Vol. I e II). ISBN: 978-0387983509 e 978-0387983523.

RÖMISCH, W. Stability of stochastic programming problems. In: RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. (Ed.). *Stochastic Programming*. 1. ed. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science B.V., 2003, (Handbooks in Operations Research and Management Science, v. 10). cap. 8, p. 483–554. ISBN: 0 444 50854 6.

ROSENTHAL, R. E. *The Status of Optimization Models for the Operation of Multireservoir Systems with Stochastic Inflows and Nonseparable Benefits*. Knoxville, Tennessee, Maio 1980. Disponível em National Technical Information Service, Springfield VA 22161 as PB80 220213.

RUSZCZYŃSKI, A. A regularized decomposition method for minimizing a sum of polyhedral functions. *Mathematical Programming*, v. 35, n. 3, p. 309–333, Julho 1986.

RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. Stochastic programming models. In: RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. (Ed.). *Stochastic Programming*. 1. ed. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science B.V., 2003, (Handbooks in Operations Research and Management Science, v. 10). cap. 1, p. 1–64. ISBN: 0 444 50854 6.

SALAS, J. D. Analysis and modeling of hydrologic time series. In: MAIDMENT, D. R. (Ed.). *Handbook of Hydrology*. United States: McGraw-Hill Book Co., NY, 1993. cap. 19, p. 72. ISBN: 0070397325.

SEN, S.; HIGLE, J. L. An Introductory Tutorial on Stochastic Linear Programming Models. *Interfaces*, v. 29, n. 2, p. 33–61, 1999.

SHAPIRO, A. Stochastic programming approach to optimization under uncertainty. *Mathematical Programming Series B*, v. 112, n. 1, p. 183–220, 2008.

TERRY, L. A. *Modelo a Sistema Equivalente – Descrição Geral*. Rio de Janeiro, Brasil: CEPEL, 1980. Relatório Técnico 1705/80.

TERRY, L. A. et al. Coordinating the energy generation of the Brazilian national hydrothermal electrical generating system. *INTERFACES*, v. 16, n. 1, p. 16–38, 1986.

THOMAS, H. A.; FIERING, M. B. Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation. In: MAASS, A. et al. (Ed.). *Design of Water Resource Systems*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1962. cap. 12, p. 459–463.

van-SLYKE, R.; WETS, R. L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 17, n. 4, p. 638–663, 1969.

WALLACE, S. E.; FLETEN, S.-E. Stochastic programming models in energy. In: RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. (Ed.). *Stochastic Programming*. 1. ed. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science B.V., 2003, (Handbooks in Operations Research and Management Science, v. 10). cap. 10, p. 637–677. ISBN: 0 444 50854 6.

WARD, J. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, v. 58(301), p. 236–244, 1963.

WETS, R. J.-B. Stochastic programming. In: NEMHAUSER, G.; KAN, A. R.; TODD, M. (Ed.). *Optimization*. 1. ed. Amsterdam: North-Holland, 1989, (Handbooks Oper. Res. Management Sci., v. 1). cap. 8, p. 573–629. ISBN 0-444-87284-1.

YEVJEVICH, V. *Probability and Statistics in Hydrology*. Fort Collins, Colo.: Water Resources Publications, 1972. 302 p.

# Apêndice A

## Identificação e censura de valores discrepantes

Este apêndice reproduz a proposta de identificação e censura de valores discrepantes feita em (PSR, 2004a) e (PSR, 2004b).

A estimação da probabilidade de ocorrência de eventos extremos via simulação Monte Carlo só é robusta se a amostra é grande o suficiente. Um evento extremo pode ocorrer em caso de amostras pequenas por simples variação amostral, acarretando em erro na estimativa. Neste caso, pode-se optar por um procedimento de censura e reamostragem quando da simulação, que pode ser calibrado de modo a não afetar significativamente a simulação.

O processo de amostragem de cada vazão para cada nó a cada estágio da árvore parte da amostragem aleatória de ruídos normalmente distribuídos. A amostragem destes ruídos é feita com uma rotina de números pseudo-aleatórios, de modo que pode ocorrer que ao longo do processo de amostragem aleatória ocorram valores de ruídos que acarretarão em eventuais valores extremos de vazões. Embora a frequência destes eventos seja muito baixa, seu efeito na tomada de decisão de política operativa pode ser eventualmente relevante. Por serem estes eventos de baixa frequência, um procedimento de censura e reamostragem não afetaria significativamente a distribuição marginal adotada na modelagem, evitando a ocorrência de vazões extremas na árvore de cenários.

Para aferir se uma determinada realização  $\mathbf{r}$  de ruídos vai resultar em uma realização extrema de vazões condicionadas, pode-se testar a região de confiança do logaritmo da vazão condicionada

$$\mathbf{y}_{t,\tau}^j = \mu_\tau^j + \sigma_\tau^j \left( \rho_\tau^j \times x_0^j + \sqrt{(1 - \rho_\tau^{j2})} r_\tau^j \right),$$

com média e correlação da distribuição log-normal multivariada de  $\mathbf{y}_{t,\tau}^j$ , condicionada ao valor inicial  $x_0$ , dados por, respectivamente,  $\vec{\mu}_{x_0}$  e  $\Sigma' = (\mathbf{D}_\sigma \mathbf{D}_\rho \Sigma)$ , onde  $\vec{\mu}_{x_0}$  é o vetor cujas componentes são  $(\mu_\tau^j + \rho_\tau^j \sigma_\tau^j x_0^j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\mathbf{D}_\sigma = \text{diag}(\sigma_\tau^1, \dots, \sigma_\tau^n)$  e  $\mathbf{D}_\rho = \text{diag}((1 - \rho_\tau^{12}), \dots, (1 - \rho_\tau^{n2}))$  são matrizes diagonais e  $\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{r})$  é a matriz de correlação espacial dos ruídos  $\mathbf{r}$ .

Para um dado nível de confiança  $\alpha$  o teste é dado pela expressão:

$$\mathbf{y}^\top \Sigma'^{-1} \mathbf{y} \leq \chi^2(n, \alpha),$$

onde  $n$  é a dimensão do vetor de ruídos e  $\chi^2(n, \alpha)$  denota a distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade calculada para o nível de significância  $\alpha$ . Note que independentemente da condição inicial em questão, a matriz de covariâncias condicionadas dos ruídos é sempre  $\Sigma$ .

O processo de censura consiste em verificar se a desigualdade acima é atendida. Se não, outro valor para  $\mathbf{r}$  é sorteado até que a desigualdade seja válida. Para  $\alpha$  igual a 95% ou 99%, na grande maioria dos casos o teste será aceito, de modo que não haverá esforço adicional significativo no processo de reamostragem. Por outro lado, vale lembrar que a censura distorce a distribuição populacional (e portanto as médias e covariâncias), de modo que deve-se escolher  $\alpha$  próximo de 100%.